Méthode du pivot de Gauss 2

Informatique pour tous

Résumé de la méthode du pivot de Gauss

Pour résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$:

1. Construire la matrice augmentée
2. Descente: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot
   - Mettre ce pivot sur la diagonale
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

Best of des erreurs

```
def transpose(M):
    tM = np.zeros(len(M[0]), len(M))
    for i in range(len(M)):
        for j in range(len(M[i])):
            tM[j][i] = M[i][j]
    return tM
```

Question

Pourquoi ce code ne marche pas?

Best of des erreurs

```python
def symetrique(M):
    for i in range(len(M)):
        for j in range(len(M[0])):
            if M[i][j] == M[j][i]:
                return True
            else:
                return False
```

Question

Pourquoi ce code ne marche pas?

Best of des erreurs

```
def remontee(M):
    for j in range(len(M[0])-2, 0):
        for i in range(0, j):
            transvection(M, i, j, -M[i, j]/M[j, j])
```

Question

Pourquoi ce code ne marche pas?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée
2. Descente: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot
   - Mettre ce pivot sur la diagonale
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss? On compte les multiplications et additions.

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $\boldsymbol{O(n^2)}$ **car il faut remplir une matrice** $\boldsymbol{n \times (n+1)}$
2. Descente: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot
   - Mettre ce pivot sur la diagonale
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $O(n^2)$
2. Descente: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot $\boldsymbol{O(n)}$ **pour parcourir toutes les lignes en dessous de la diagonale**
   - Mettre ce pivot sur la diagonale
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $O(n^2)$
2. Descente: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot $O(n)$
   - Mettre ce pivot sur la diagonale $\boldsymbol{O(n)}$ **pour échanger 2 lignes**
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $O(n^2)$
2. Descente: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot $O(n)$
   - Mettre ce pivot sur la diagonale $O(n)$
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale $\boldsymbol{O(n^2)}$ **car il faut faire au plus** $\boldsymbol{n}$ **transvections**
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $O(n^2)$
2. Descente en $\boldsymbol{n \times (O(n) + O(n) + O(n^2)) = O(n^3)}$: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot $O(n)$
   - Mettre ce pivot sur la diagonale $O(n)$
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale $O(n^2)$
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $O(n^2)$
2. Descente en $O(n^3)$: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot $O(n)$
   - Mettre ce pivot sur la diagonale $O(n)$
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale $O(n^2)$
3. Remontée: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale $\boldsymbol{O(n^2)}$ **car il faut faire au plus $\boldsymbol{n}$ transvections**

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $O(n^2)$
2. Descente en $O(n^3)$: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot $O(n)$
   - Mettre ce pivot sur la diagonale $O(n)$
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale $O(n^2)$
3. Remontée en $\boldsymbol{n \times O(n^2)}$: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale $\boldsymbol{O(n^2)}$ **car il faut faire au plus n transvections**

Quelle est la complexité de la méthode du pivot de Gauss?

Complexité de la méthode du pivot de Gauss

On veut résoudre $AX = B$, avec A une matrice $n \times n$.

1. Construire la matrice augmentée $O(n^2)$
2. Descente en $O(n^3)$: pour toute colonne, de gauche à droite...
   - Trouver un pivot $O(n)$
   - Mettre ce pivot sur la diagonale $O(n)$
   - Mettre des 0 en dessous de la diagonale $O(n^2)$
3. Remontée en $O(n^3)$: pour toute colonne, de droite à gauche...
   - Mettre des 0 au dessus de la diagonale

La complexité totale est donc $\boxed{\boldsymbol{O(n^3)}}$.

Méthode du pivot de Gauss

Conclusion:

1. Il est possible de résoudre un système de n équations à n inconnues en complexité $O(n^3)$.
2. Il est possible d'inverser une matrice inversible $n \times n$ en complexité $O(n^3)$
3. Il est possible de calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$ en complexité $O(n^3)$