I Rendu de monnaie

On fixe un tableau `p` d'entiers positifs (par exemple, les différentes valeurs de pièces de monnaie) et, étant donné un entier positif m, on veut connaître le plus petit nombre d'éléments (avec répétition: on peut utiliser plusieurs fois la même pièce) de `p` dont la somme vaut m. On appelle $r(m)$ ce nombre.
S'il n'est pas possible d'obtenir m comme somme d'éléments de `p`, on conviendra que $r(m) = \infty$, et on utilisera `max_int` en OCaml, qui est l'entier le plus grand représentable sur l'ordinateur. Attention cependant au fait que `max_int + 1` est égal au plus petit entier représentable (à cause de la représentation "cyclique" des entiers): il faut donc éviter d'additionner `max_int` avec un autre entier.

Exemple: si `p = [|1; 2; 5|]` alors $r(13) = 4$ (car $13 = 5 + 5 + 2 + 1$ et on ne peut pas obtenir 13 avec moins de pièces).

1. Si `p` est de taille 1, donner la valeur de $r(m)$ en fonction de `p.(0)` et de m.

Si i est un indice de `p`, on définit maintenant $r(i,\ m)$ comme le plus petit nombre d'éléments (avec répétition) parmi `p.(0)`, `p.(1)`, ..., `p.(i)` dont la somme vaut m.
Exemple: si `p = [|1; 2; 5|]` alors $r(1,\ 13) = 7$ (car $13 = 2{\times}6 + 1$ et on ne peut pas obtenir 13 plus efficacement en utilisant seulement les pièces 1 et 2).

2. Donner une équation de récurrence sur $r(i,\ m)$.
   On pourra distinguer le cas où on utilise `p.(i)` au moins une fois (à condition que `p.(i)` $< m$) et le cas où on n'utilise pas `p.(i)`.

3. En déduire un fonction récursive `rendu` telle que `rendu p i m` renvoie $r(i,\ m)$. Prouver que `rendu` termine.

Pour avoir un algorithme plus efficace, nous allons maintenant utiliser une méthode par programmation dynamique, en utilisant une matrice `r` telle que `r.(i).(m)` contient $r(i, m)$.

4. Écrire une fonction `init` telle que, si `r` est une matrice de la bonne taille (mais avec des valeurs quelconques), `init p m r` mette la valeur $r(0,$ `k`$)$ dans `r.(0).(k)`, pour tout `k` $\in \{$ 0, 1, ..., `m - 1` $\}$.

5. Écrire une fonction `rendu2`, utilisant une méthode par programmation dynamique, telle que `rendu2 p m` renvoie $r($`m`$)$.