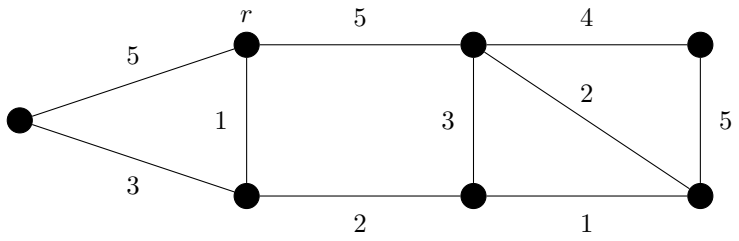
TD 3 corrigé : Graphes pondérés

1 Petites questions



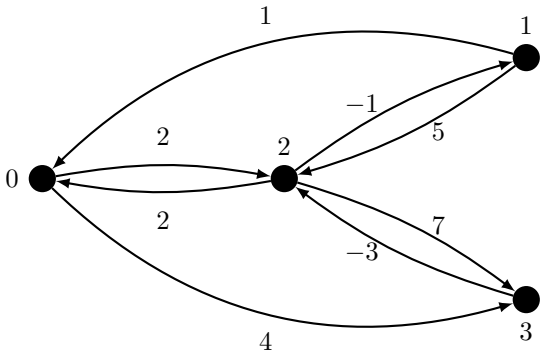
1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra à la main sur le graphe ci-dessus pour déterminer les distances de r aux autres sommets.

2. $$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & \infty \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall au graphe représenté par la matrice d'adjacence pondérée ci-dessus, pour trouver la matrice des distances.

   ▶ Pour calculer la $k$ème matrice des distances d_k, on regarde si on peut diminuer chaque case `d.(u).(v)` par `d.(u).(k) + d.(k).(v)`. Les valeurs mises à jour sont en gras:

$$\left(\begin{array}{|c|ccc} \hline 0 & \infty & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ 2 & -1 & 0 & \mathbf{6} \\ \infty & \infty & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & \infty & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 5 \\ \hline \mathbf{0} & -1 & 0 & \mathbf{4} \\ \infty & \infty & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 4 \\ \hline \mathbf{-3} & \mathbf{-4} & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \\ 1 & 0 & \mathbf{2} & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ \hline -3 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$



3. Expliquer comment modifier l'algorithme de Floyd-Warshall de façon à calculer la **clôture transitive** d'un graphe (non pondéré) c'est à dire une matrice `t` de booléens telle que:

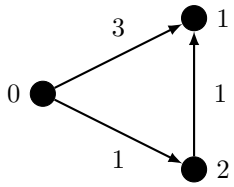
   `t.(u).(v)` $\iff$ il existe un chemin de `u` à `v`

   Trouver une façon plus efficace de calculer cette clôture transitive.

   ▶ On peut définir $t_k(u,v) =$ « $\exists$ un chemin de u à v n'utilisant que des sommets intermédiaires $< k$ ». Alors, avec le même raisonnement qu'en cours: $t_{k+1}(u,v) = t_k(u,v)$ `||` $(t_k(u,k)$ `&&` $t_k(k,v))$. On pourrait donc calculer `t` par programmation dynamique de façon similaire à Floyd-Warshall, en $O(|V|^3)$.

   Cependant il serait plus efficace de faire un DFS (ou BFS) depuis chaque sommet `u` pour obtenir un tableau `vu` que l'on met dans `t.(u)`: si le graphe est représenté par liste d'adjacence la complexité est alors $O(|V| \times (|V| + |E|))$.

4. Change t-on les plus courts chemins si on additionne/multiplie les poids de toutes les arêtes d'un graphe par une constante?
   ▶ Soit K une constante, $w_1(\vec{e}) = w(\vec{e}) + K$ et $w_2(\vec{e}) = w(\vec{e}) \times K$. Soit C un chemin. Alors:
   - $w_1(C) = \sum_{\vec{e} \in C} (w(\vec{e}) + K) = w(C) + \ell(C)K$, où $\ell(C)$ est le nombre d'arcs de C. Tous les poids des chemins n'augmentent pas de la même façon... ce qui peut changer les plus courts chemins. Par exemple si on augmente de 2 les poids sur le graphe suivant, le plus court chemin de 0 à 1 passe de $0 \to 2 \to 1$ à $0 \to 1$:



   - $w_2(C) = \sum_{\vec{e} \in C} (w(\vec{e}) \times K) = w(C) \times K$: si $K > 0$ alors minimiser $w_2(C)$ revient à minimiser $w(C)$, donc les plus courts chemins ne changent pas.

5. On suppose avoir un graphe orienté $\vec{G}$ dont les **sommets** sont pondérés par w, au lieu des arêtes. Le poids d'un chemin est alors la somme des poids de ses sommets. Comment modifier $\vec{G}$ pour pouvoir trouver des chemins de plus petit poids de $\vec{G}$, avec les algorithmes du cours?
   ▶ On remplace chaque sommet v par deux sommets v_1 et v_2 et on ajoute un arc (v_1, v_2) dont le poids est celui de v. On remplace un arc (v, v') dans $\vec{G}$ par un arc (v_2, v'_1) de poids 0. $\vec{G}$

6. Le graphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ d'une chaîne de Markov possède une probabilité sur chaque arc. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses arcs. Comment trouver un chemin le plus probable d'un sommet à un autre?
   ▶ 1ère solution: remplacer chaque probabilité $p(u, v)$ par $-\ln(p(u, v)) \geq 0$. Alors la somme des poids des arcs d'un chemin C est $\sum_{(u,v) \in C} -\ln(p(u, v)) = -\ln(\prod_{(u,v) \in C} p(u, v))$ donc maximiser $\prod_{(u,v) \in C} p(u, v)$ revient à minimiser $\sum_{(u,v) \in C} -\ln(p(u, v))$: on peut alors appliquer un algorithme de plus courts chemins classique.
   2ème solution: modifier un algorithme de plus court chemin. Par exemple, Dijkstra deviendrait:

> **Algorithme de Dijkstra pour chemins les plus probables**
>
> Initialement: `next` contient tous les sommets
> `proba.(r) <- 1` et `proba.(v) <- 0`, $\forall$ `v` $\neq$ `r`
> Tant que `next` $\neq \emptyset$:
> Extraire `u` de `next` tel que `proba.(u)` soit maximum
> Pour tout voisin `v` de `u`:
> `proba.(v) <- max proba.(v) (proba.(u) * p(u, v))`

   On peut refaire la preuve du cours pour voir que cette version de Dijkstra ne marcherait pas pour des « probabilités » > 1. On peut aussi modifier Floyd-Warshall (valable tant qu'il n'y a pas de cycle de probabilité > 1):

> **Algorithme de Floyd-Warshall pour chemins les plus probables**
>
> Initialiser `d.(u).(v)` $\leftarrow p(u, v)$ si $(u, v) \in \vec{E}$, 0 sinon.
>
> Pour $k = 0$ à $|V| - 1$:
> Pour tout sommet u:
> Pour tout sommet v:
> `d.(u).(v)` $\leftarrow$ `max d.(u).(v) (d.(u).(k) * d.(k).(v))`

7. Comment pourrait-on déterminer le poids minimum d'un cycle dans un graphe orienté? En quelle complexité?
   ▶ On peut calculer la matrice `d` des distances (`d.(u).(v)` est la distance du sommet `u` au sommet `v`) puis on calcule la valeur minimum de `d.(u).(v) + d.(v).(u)`, pour tout `u`, `v`.

8. On suppose donné un graphe pondéré où un sommet est une ville et un arc est une route dont le poids est sa longueur. On part d'une ville s avec une voiture consommant 5L/100km et avec un réservoir rempli de 50L d'essence. On suppose connu le prix de l'essence dans chaque ville. Comment trouver un chemin de coût minimum jusqu'à une autre ville t? Quelle serait la complexité?
   ▶ Problème: une configuration dépend à la fois de la ville et de la quantité d'essence restante. On peut construire le graphe dont les sommets sont les couples (ville, essence), où essence est entre 0 et 50 (litres). On rajoute alors

des arcs de (ville, essence) vers (ville, essence + 1) de poids le prix d'un litre d'essence dans la ville (ce qui revient à prendre de l'essence). On ajoute aussi des arcs de (ville1, essence) vers (ville2, essence - consommation $\times$ distance de ville1 à ville2) de poids 0, si l'essence reste ≥ 0. Il suffit alors de trouver un plus court chemin de $(s, 50)$ vers un sommet (t, e), avec e quelconque.

9. Soit $\vec{G}$ un graphe sans arc de poids négatif et s, t deux sommets. Montrer que l'on peut trouver tous les arcs utilisés par au moins un plus court chemin de s à t, en utilisant 2 fois l'algorithme de Dijkstra.
   ▶ Soit (u, v) un arc. S'il existe un plus court chemin C de s à t passant par (u, v) alors, comme le sous-chemin de C de s à u est un plus court chemin et le sous-chemin de v à t est un plus court chemin, $d(s, t) = d(s, u) + w(u, v) + d(v, t)$. Réciproquement, si $d(s, t) = d(s, u) + w(u, v) + d(v, t)$ alors (u, v) est sur un plus court chemin de s à t (celui constitué d'un plus court chemin de s à u, puis (u, v), puis un plus court chemin de v à t). On peut donc calculer $d(s, u)$, $\forall u \in V$, avec l'algorithme de Dijkstra puis $d(v, t)$, $\forall v \in V$. Pour savoir si (u, v) est sur un plus court chemin, il suffit alors de tester si $d(s, t) = d(s, u) + w(u, v) + d(v, t)$.

2 Algorithme de Bellman-Ford

Soit $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graphe orienté et $r \in V$. L'algorithme de Bellman-Ford permet de trouver les plus courts chemins de r à n'importe quel autre sommet, même si il y a des poids négatifs. Il consiste à calculer le poids $d^{(k)}(v)$ d'un plus court chemin de r à v **utilisant au plus k arêtes**, par programmation dynamique.

1. Donner (en la prouvant) une équation de récurrence sur les $d^{(k)}(v)$.
   ▶ Soit C un plus court chemin de r à v utilisant au plus $k+1$ arêtes. Soit u le prédécesseur de v dans C. Alors le sous-chemin de C de r à u est un plus court chemin utilisant au plus k arêtes, donc $d^{(k+1)}(v) = d^{(k)}(u) + w(u, v)$. On obtient u en prenant celui qui minimise la distance: $\boxed{d^{(k+1)}(v) = \min_{(u,v)\in\vec{E}} d^{(k)}(u) + w(u, v)}$.

2. En déduire un algorithme en pseudo-code pour calculer $d(r, v)$, $\forall v \in V$.

   Algorithme de Bellman-Ford

   Initialiser `d.(r) <- 0` et `d.(v) <-` ∞, $\forall$ `v` $\neq$ `r`

   Pour $k = 0$ à $|V| - 2$:
   Pour tout sommet v:
   Pour tout arc (u, v) rentrant dans v:
   `d.(v)` $\leftarrow$ `min d.(v) (d.(u) + w(u, v))`

   On remarque que parcourir tout sommet v puis tout arc (u, v) revient à parcourir tous les arcs $(u, v) \in \vec{E}$ quelconques, donc on peut simplifier l'algorithme:

   Algorithme de Bellman-Ford

   Initialiser `d.(r) <- 0` et `d.(v) <-` ∞, $\forall$ `v` $\neq$ `r`

   Pour $k = 0$ à $|V| - 2$:
   Pour tout arc $(u, v) \in \vec{E}$:
   `d.(v)` $\leftarrow$ `min d.(v) (d.(u) + w(u, v))`

3. En déduire une fonction `bellman : int list vect -> (int -> int -> int) -> int -> int vect` telle que `bellman g w r` renvoie le tableau des distances depuis `r`, dans le graphe `g` pondéré par `w`.

```
let bellman g w r =
  let n = vect_length g in
  let d = make_vect n max_int in
  d.(r) <- 0;
  for k = 0 to n - 2 do
    for u = 0 to n - 1 do
      do_list (fun v -> d.(v) <- min d.(v) (sum d.(u) (w u v))) g.(u)
    done
  done; d;;
```

4. Quelle est la complexité de `bellman`? Comparer avec Dijkstra et Floyd-Warshall.

5. Comment modifier `bellman` pour savoir s'il existe un cycle de poids négatif?

On peut améliorer l'idée de Bellman-Ford lorsque l'on souhaite calculer les distances entre toute paire de sommets.

6. Écrire une relation de récurrence sur le poids $d^{(k)}(u,v)$ d'un plus court chemin de u à v utilisant au plus $\mathbf{2^k}$ arêtes, en « coupant » un plus court chemin en deux.

7. En déduire une fonction `bellman_all : int list vect -> (int -> int -> int) -> int int vect` renvoyant la matrice des distances entre toute paire de sommets d'un graphe pondéré. Quelle est sa complexité? Comparer avec Floyd-Warshall.

```
let bellman_all g w =
  let n = vect_length g in
  let d = make_matrix n max_int in
  d.(r) <- 0;
  for k = 0 to log2 n do
    for u = 0 to n - 1 do
      for v = 0 to n - 1 do
        for x = 0 to n - 1 do
          d.(u).(v) <- min d.(u).(v) (sum d.(u).(x) d.(x).(v))
        done
      done
    done
  done; d;;
```

3 Plus courts chemins dans un graphe sans cycle

On veut trouver les distances d'un sommet à tous les autres dans un graphe orienté sans cycle $\vec{G} = (V, \vec{E})$ pondéré par w. On pourra utiliser la fonction `tri_topo : int list vect -> int list` du TD 2, renvoyant une liste des sommets d'un graphe sans cycle « compatible » avec les arcs ($(u,v) \in \vec{E} \Longrightarrow u$ est avant v dans la liste).

1. Expliquer comment trouver les distances d'un sommet r à tous les autres dans $\vec{G}$ représenté par liste d'adjacence, en complexité $O(|\vec{E}| + |V|)$.
   ► Soit $v_1, ..., v_n$ les sommets de $\vec{G}$ dans un ordre topologique. Alors $d(r,r) = 0$ et $d(r,v_k) = \min\limits_{(v_i,v_k)\in\vec{E}} d(r,v_i) + w(v_i,v_k)$ (si $v_k \neq r$ et il n'y a pas d'arc entrant dans v_k on pose $d(r,v_k) = \infty$). On peut donc calculer $d(r,v_k)$ par k croissant.

2. Écrire une fonction correspondant à la question précédente.

```
let topo_bellman g r =
  let n = vect_length g in
  let d = make_vect n max_int in
  d.(r) <- 0;
  do_list (fun u -> do_list (fun v -> d.(v) <- min d.(v) (sum d.(u) (w u v))) g.(u)) (tri_topo g);;
```

3. Comment modifier l'algorithme précédent pour obtenir des chemins de poids **maximum**? Une modification similaire fonctionnerait-elle avec l'algorithme de Dijkstra?
   ► On a alors $d(r,r) = 0$ et $d(r,v_k) = \max\limits_{(v_i,v_k)\in\vec{E}} d(r,v_i) + w(v_i,v_k)$ (si $v_k \neq r$ et il n'y a pas d'arc entrant dans v_k on pose $d(r,v_k) = -\infty$). On peut donc calculer $d(r,v_k)$ par k croissant.

4 Algorithme de Johnson

Soit $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graphe orienté pondéré par $w : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ (des poids peuvent être négatifs). On a vu en cours l'algorithme de Floyd-Warshall pour trouver les plus courts chemins de n'importe quel sommet u à n'importe quel autre v. L'algorithme de Johnson résout le même problème, mais possiblement avec une meilleure complexité. L'idée de l'algorithme de Johnson est de modifier les poids de $\vec{G}$ pour les rendre positifs, sans modifier les plus courts chemins. On peut alors appliquer $|V|$ fois l'algorithme de Dijkstra (une fois depuis chaque sommet) pour obtenir tous les plus courts chemins.

1. Soit $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit $w_h : (u,v) \longmapsto w(u,v) + h(u) - h(v)$. Montrer que, dans $\vec{G}$, les plus courts chemins pour w et w_h sont les mêmes et qu'il existe un cycle de poids négatif pour w ssi il en existe un pour w_h.
   ► Soit C un chemin de u à v. Notons $u = v_1, v_2, ..., v_k = v$ les sommets utilisés par C. Alors $w_h(C) = \sum\limits_{(v_i,v_{i+1})} w(v_i,v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1}) = w(C) + h(u) - h(v)$ (somme télescopique). $h(u) - h(v)$ ne dépend pas du chemin C, seulement des extrémités. Donc un chemin C de poids minimum de u à v est obtenu quand $w(C)$ est minimum, ce qui montre le résultat.

2. Trouver $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $w_h \geq 0$. On pourra supposer dans un premier temps que tous les sommets de $\vec{G}$ sont atteignables depuis un sommet r.
   ► Soit $h(v) = d(r,v)$. Si $(u,v) \in \vec{E}$, il existe un chemin de r à u de poids $d(r,u)$ (par définition de $d(r,u)$ auquel on peut ajouter (u,v) pour obtenir un chemin de r à v. Comme $d(r,v)$ est le poids d'un plus court chemin de r à v, $d(r,v) \leq d(r,u) + w(u,v)$, d'où $w_h \geq 0$.

3. En utilisant plusieurs fois l'algorithme de Dijkstra, écrire une fonction `johnson` renvoyant la matrice des distances entre toute paire de sommets, dans $\vec{G}$ pondéré par w.
   ▶ On peut calculer h avec l'algorithme de Bellman-Ford

```
let johnson g w =
  let d0 = bellman g w 0 in
  let wh u v = d0.(u) + w u v - d0.(v) in
  let d = make_vect n [||] in
  for u = 0 to n - 1 do
    d.(u) <- dijkstra g wh u
  done; d;;
```

4. Comparer la complexité de `johnson` avec celle de Floyd-Warshall

5 Arbre couvrant de poids minimum

Soit $G = (V, E)$ un graphe **non-orienté** pondéré par $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Un arbre couvrant de G est un arbre inclus dans G et contenant tous les sommets de G. Le poids d'un arbre est la somme des poids de ses arêtes.

1. Montrer que G possède un arbre couvrant ssi il est connexe. Dans la suite on suppose G connexe.
   ▶ Supposons que G possède un arbre couvrant T. Alors il existe un chemin dans T entre deux sommets quelconques, qui est aussi un chemin dans G.
   Réciproquement, l'ensemble des sommets et arêtes parcourues par un parcours (en profondeur ou largeur) est un arbre, couvrant si G est connexe.

2. Soit $S \subsetneq V$. On suppose connaître un arbre T de poids minimum dont l'ensemble des sommets est S.
   Montrer qu'il est possible de rajouter une arête $\{u, v\}$ à T telle que $u \in S$, $v \notin S$ pour obtenir un arbre couvrant de poids minimum sur $S \cup \{v\}$.
   ▶ On rajoute à T une arête $\{u, v\}$ de poids minimum telle que $u \in S$, $v \notin S$. On voit facilement que T est toujours connexe sans cycle: c'est un arbre. En commençant avec un singleton S et en rajoutant de cette façon des arêtes e_1, ..., e_{n-1} (dans cet ordre), on obtient un arbre couvrant T. Soit T^* un arbre de poids minimum avec un nombre maximum d'arêtes en commun avec T. Supposons $T \neq T^*$ et soit $e_i = u, v$ la première arête qui est dans T mais pas dans T^*. Considérons l'ensemble S juste avant l'ajout de e_i à T. Le chemin de u à v dans T^* sort de S avec une arête e^*. Alors, supprimer e^* et ajouter e_i dans T^* résulte en un arbre couvrant de poids minimum (car $w(e^*) \geq w(e_i)$, par choix de e_i) ayant plus d'arêtes en commun avec T. D'où une contradiction: $T = T^*$.

3. En déduire un algorithme en pseudo-code pour trouver un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe.

4. Écrire une fonction `prim : int list vect -> (int -> int -> int) -> int list` renvoyant un arbre couvrant de poids minimum (sous forme d'un tableau des pères) d'un graphe (sous forme de liste d'adjacence). On pourra utiliser une file de priorité `f` possèdant les opérations `f.add`, `f.is_empty`, `f.take_min`.

```
let prim g w =
  let n = vect_length g in
  let fp = fp_new () in
  let pere = make_vect n (-1) in
  fp.add (0, 0, 0);
  while not fp.is_empty () do
    let _, u, p = fp.take_min () in
    if pere.(u) = -1 then
      (pere.(u) <- p;
       do_list (fun v -> fp.add (w u v, v, u)) g.(u))
  done; pere;;
```

5. Appliquer cet algorithme (de Prim) au graphe du I.1. Un arbre couvrant de poids minimum est-il un arbre des plus courts chemins (et inversement?)?

6. Montrer qu'il serait possible d'utiliser la même fonction Caml pour implémenter les algorithmes de Dijkstra, Prim, BFS, DFS, en changeant légèrement la structure de donnée utilisée. C'est intéressant théoriquement... pourquoi n'est-ce pas souhaitable en pratique?

7. On redéfinit dans cette question le poids d'un chemin comme le poids maximum d'une de ses arêtes. Comment trouver des chemins de poids minimum d'un sommet r à tous les autres?