Ordonnancement

March 15, 2021

Problème

Considérons un ensemble de tâches devant être réalisées.
Chaque tâche a une durée.
Il y a des dépendances entre les tâches : par exemple, une tâche C peut avoir besoin que A et B soient terminées avant de commencer.

Problème

Considérons un ensemble de tâches devant être réalisées.
Chaque tâche a une durée.
Il y a des dépendances entre les tâches : par exemple, une tâche C peut avoir besoin que A et B soient terminées avant de commencer.

Objectif : minimiser le temps total de réalisation des tâches.

Programmation dynamique

On note $w(t)$ la durée d'une tâche t.
Soit t une tâche et T l'ensemble des prédecesseurs de t (c'est-à-dire tâches qui doivent finir avant que t commence).
On veut calculer $d(t)$, la date minimum de fin de t.

Programmation dynamique

On note $w(t)$ la durée d'une tâche t.
Soit t une tâche et T l'ensemble des prédecesseurs de t (c'est-à-dire tâches qui doivent finir avant que t commence).
On veut calculer $d(t)$, la date minimum de fin de t.

On peut montrer que :

$$\boxed{d(t) = w(t) + \max_{t' \in T} d(t')}$$

Programmation dynamique

On note $w(t)$ la durée d'une tâche t.
Soit t une tâche et T l'ensemble des prédecesseurs de t (c'est-à-dire tâches qui doivent finir avant que t commence).
On veut calculer $d(t)$, la date minimum de fin de t.

On peut montrer que :

$$\boxed{d(t) = w(t) + \max_{t' \in T} d(t')}$$

La valeur maximum de $d(t)$, pour une tâche quelconque t, donne le temps de réalisation total minimum.
Le chemin correspondant est dit **critique** (toutes les tâches le long de ce chemin doivent être réalisées dès que possible).

Méthode MPM

La méthode MPM consiste à considérer un graphe orienté tel que :

1. Les sommets correspond au début d'une tâche.
2. Chaque arête est une dépendance, avec un poids égal à la durée de la tâche de départ.

Méthode MPM

La méthode MPM consiste à considérer un graphe orienté tel que :

1. Les sommets correspond au début d'une tâche.
2. Chaque arête est une dépendance, avec un poids égal à la durée de la tâche de départ.

De plus on rajoute deux sommets s et p (pour le début et la fin) :

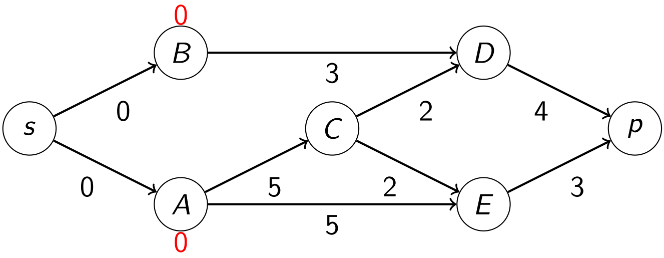
1. s est relié à chaque tâche sans prédécesseur, avec un poids 0.
2. Chaque tâche t sans successeur est relié à p, avec un poids égal à la durée de t.

Méthode MPM

Tâche	Prédecesseurs	Durée
A		5
B		3
C	A	2
D	B, C	4
E	A, C	3

Méthode MPM

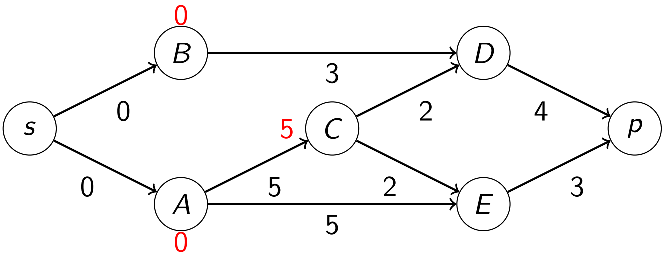
Tâche	Prédecesseurs	Durée
A		5
B		3
C	A	2
D	B, C	4
E	A, C	3



Dates au plus tôt pour démarrer chaque tâche

Méthode MPM

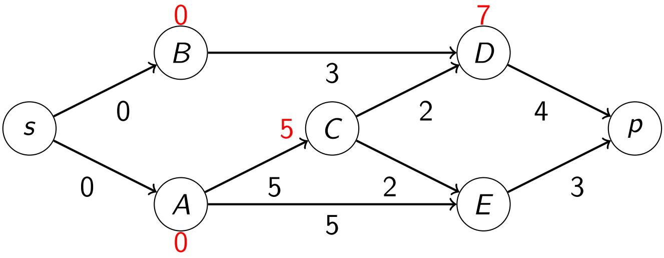
Tâche	Prédecesseurs	Durée
A		5
B		3
C	A	2
D	B, C	4
E	A, C	3



Dates au plus tôt pour démarrer chaque tâche

Méthode MPM

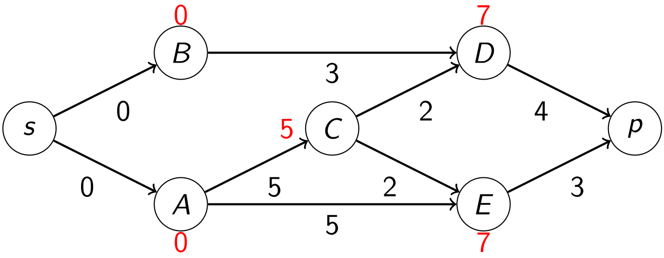
Tâche	Prédecesseurs	Durée
A		5
B		3
C	A	2
D	B, C	4
E	A, C	3



Dates au plus tôt pour démarrer chaque tâche

Méthode MPM

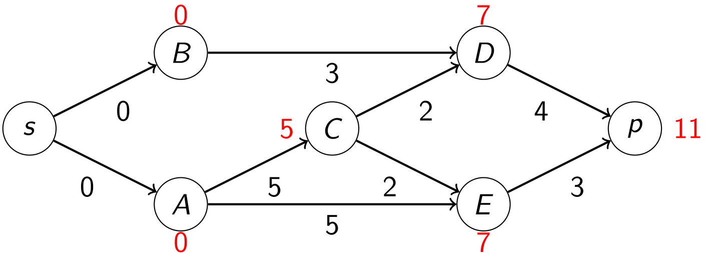
Tâche	Prédecesseurs	Durée
A		5
B		3
C	A	2
D	B, C	4
E	A, C	3



Dates au plus tôt pour démarrer chaque tâche

Méthode MPM

Tâche	Prédecesseurs	Durée
A		5
B		3
C	A	2
D	B, C	4
E	A, C	3



Dates au plus tôt pour démarrer chaque tâche

Date au plus tard

On a donc trouvé la **date au plus tôt** pour commencer chaque tâche (la date la plus tôt pour t étant la durée minimale pour réaliser toutes les tâches).

On peut aussi calculer la **date au plus tard** $f(t)$ d'une tâche t : la date maximum à laquelle on peut démarrer t sans ralentir la durée totale optimale.

Date au plus tard

On a donc trouvé la **date au plus tôt** pour commencer chaque tâche (la date la plus tôt pour t étant la durée minimale pour réaliser toutes les tâches).

On peut aussi calculer la **date au plus tard** $f(t)$ d'une tâche t : la date maximum à laquelle on peut démarrer t sans ralentir la durée totale optimale.
Soit T l'ensemble des successeurs de t. On peut montrer que :

$$\boxed{f(t) = \min_{t' \in T} f(t') - w(t)}$$

Date au plus tard

On a donc trouvé la **date au plus tôt** pour commencer chaque tâche (la date la plus tôt pour t étant la durée minimale pour réaliser toutes les tâches).

On peut aussi calculer la **date au plus tard** $f(t)$ d'une tâche t : la date maximum à laquelle on peut démarrer t sans ralentir la durée totale optimale.
Soit T l'ensemble des successeurs de t. On peut montrer que :

$$\boxed{f(t) = \min_{t' \in T} f(t') - w(t)}$$

Ainsi, on peut trouver les dates au plus tard de chaque tâche en utilisant le graphe obtenu précédemment, à l'envers (en partant de p).

Méthode PERT

La méthode PERT consiste à considérer un graphe orienté tel que :

1. Les arêtes sont les tâches.
2. Les sommets correspondent aux débuts/fins de tâches.

Méthode PERT : exemple

Voir vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=xAidvykSNXo