Aspects de la connexité avec contraintes de matroïdes

Quentin Fortier

Directeur de thèse: Zoltán Szigeti

27 octobre 2017, G-SCOP (Grenoble)

Graphe

Définition

Un **graphe** est un couple $G = (V, E)$, où :

1. V est un ensemble de **sommets**.
2. E est un multi-ensemble d'**arêtes**, chaque arête étant un ensemble de 2 sommets.

Graphe

Définition

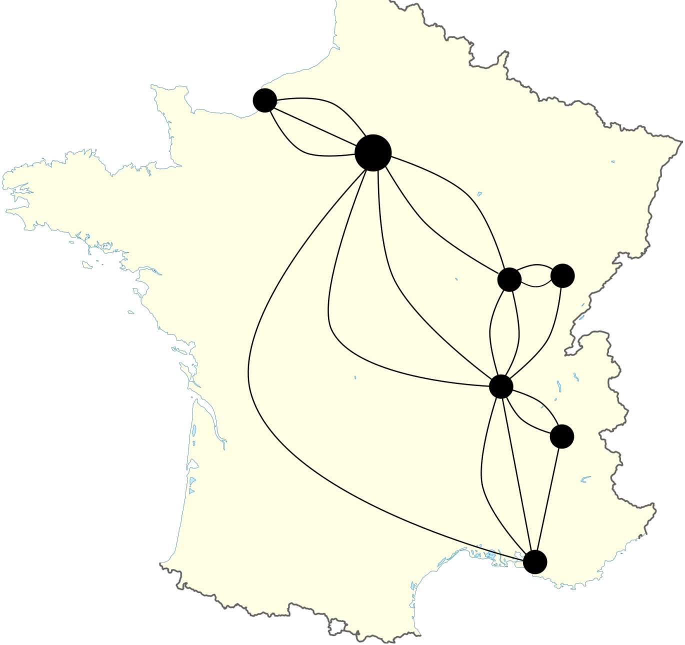
Un **graphe** est un couple $G = (V, E)$, où :

1. V est un ensemble de **sommets**.
2. E est un multi-ensemble d'**arêtes**, chaque arête étant un ensemble de 2 sommets.

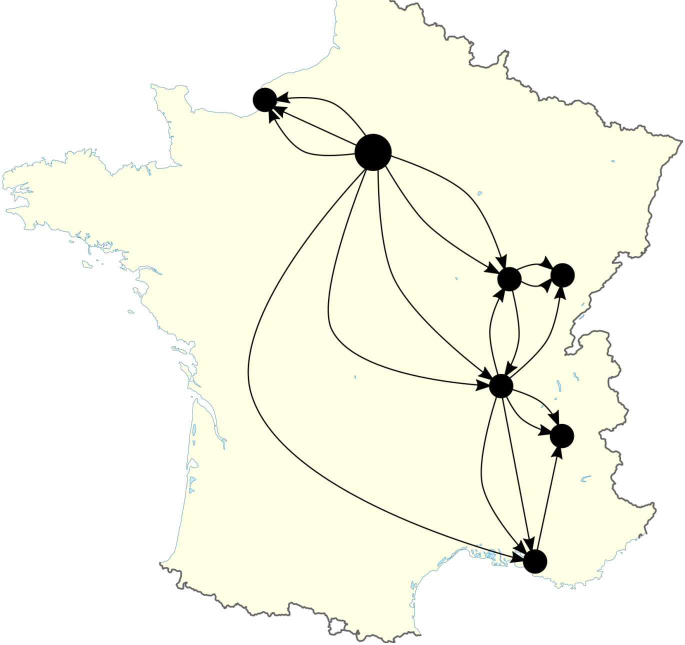
Définition

Un **graphe orienté** est un couple $\vec{G} = (V, \vec{E})$, où :

1. V est un ensemble de **sommets**.
2. $\vec{E}$ est un multi-ensemble d'**arcs**, chaque arc étant un couple de 2 sommets.



Sommets = villes. Arêtes = autoroutes, trains, avions.



Une orientation possible.

Connexité

Définition

$\overrightarrow{G}$ est ***k*-arc-connexe depuis *r*** s'il existe k chemins arc-disjoints de r vers n'importe quel sommet de $\overrightarrow{G}$.

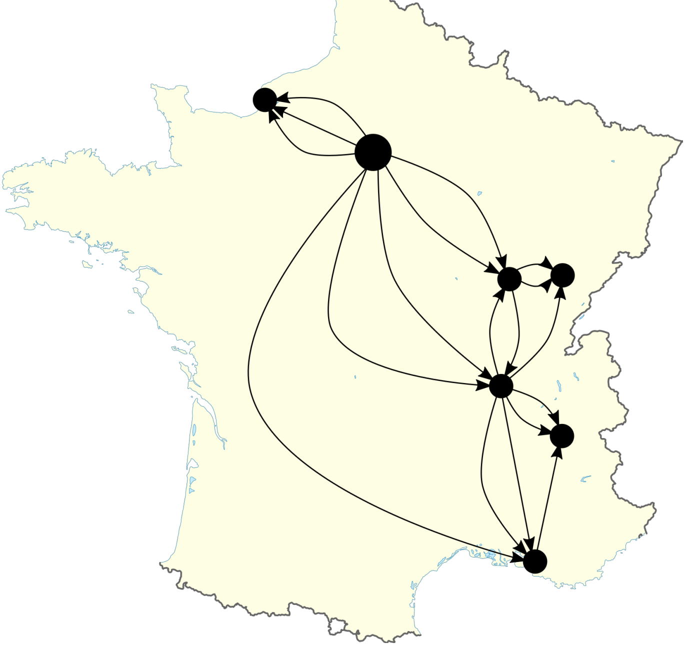
Connexité

Définition

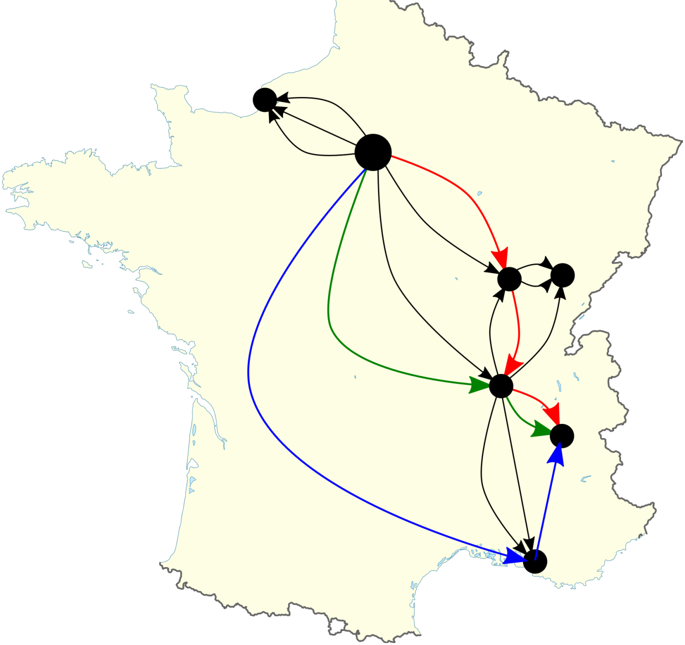
$\overrightarrow{G}$ est ***k*-arc-connexe depuis *r*** s'il existe k chemins arc-disjoints de r vers n'importe quel sommet de $\overrightarrow{G}$.

Définition

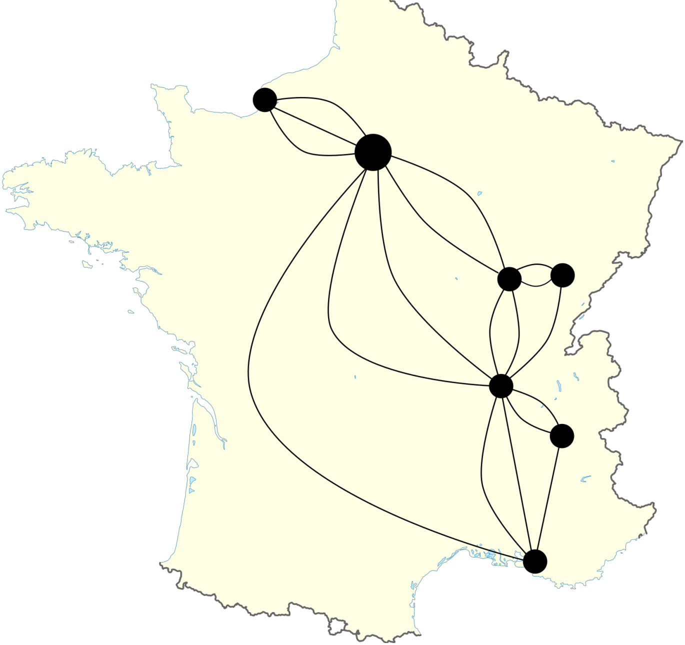
G est ***k*-partition-connexe** s'il possède une orientation $\overrightarrow{G}$ qui est k-arc-connexe depuis un certain sommet.



Graphe orienté 3-arc-connexe depuis Paris.



Exemple : il y a 3 chemins arcs-disjoints de Paris vers Grenoble.



Graphe 3-partition-connexe.

Arbre, arborescence

Définition

Un **arbre** T est un graphe ayant un unique chemin entre deux sommets quelconques.

Arbre, arborescence

Définition

Un **arbre** T est un graphe ayant un unique chemin entre deux sommets quelconques.

Définition

Une ***r*-arborescence** $\vec{T}$ est un graphe orienté ayant un unique chemin de r à un sommet quelconque.

Tout arbre peut être orienté en une r-arborescence.

Arbre, arborescence

Définition

Si un arbre (ou arborescence) est inclus dans un graphe G, on dit qu'il est **couvrant** s'il contient tous les sommets de G.

Arbre, arborescence

Définition

Si un arbre (ou arborescence) est inclus dans un graphe G, on dit qu'il est **couvrant** s'il contient tous les sommets de G.

En utilisant un parcours de graphe depuis r :

Lemme

$$\vec{G} \text{ est 1-arc-connexe depuis } r.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\vec{G} \text{ contient une } r\text{-arborescence couvrante.}$$

Packing d'arbres

Edmonds a généralisé cette observation :

Théorème d'Edmonds (1973)

$\overrightarrow{G}$ est k-arc-connexe depuis r.

$$\iff$$

$\overrightarrow{G}$ contient k r-arborescences couvrantes arc-disjointes (un **packing** de k arborescences couvrantes).

Packing d'arbres

Edmonds a généralisé cette observation :

Théorème d'Edmonds (1973)

$\vec{G}$ est k-arc-connexe depuis r.

$$\Longleftrightarrow$$

$\vec{G}$ contient k r-arborescences couvrantes arc-disjointes
(un **packing** de k arborescences couvrantes).

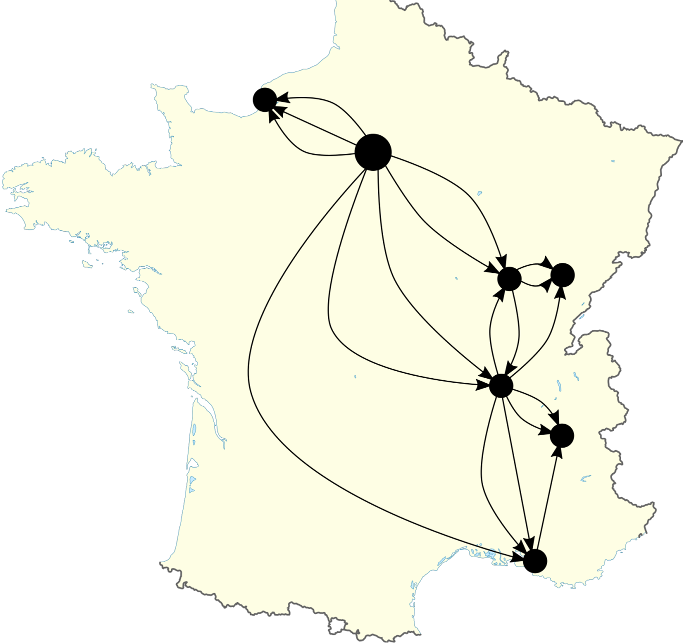
Ce qui implique :

Théorème de Tutte (1961)

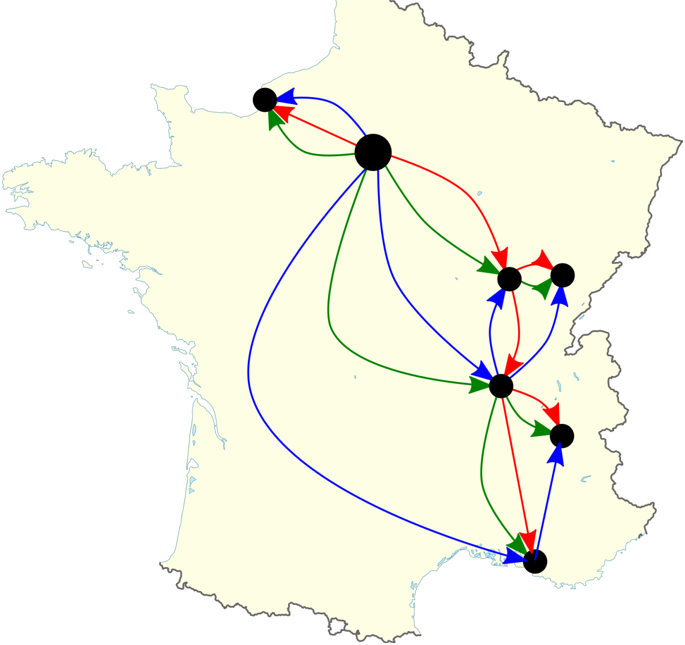
G est k-partition-connexe.

$$\Longleftrightarrow$$

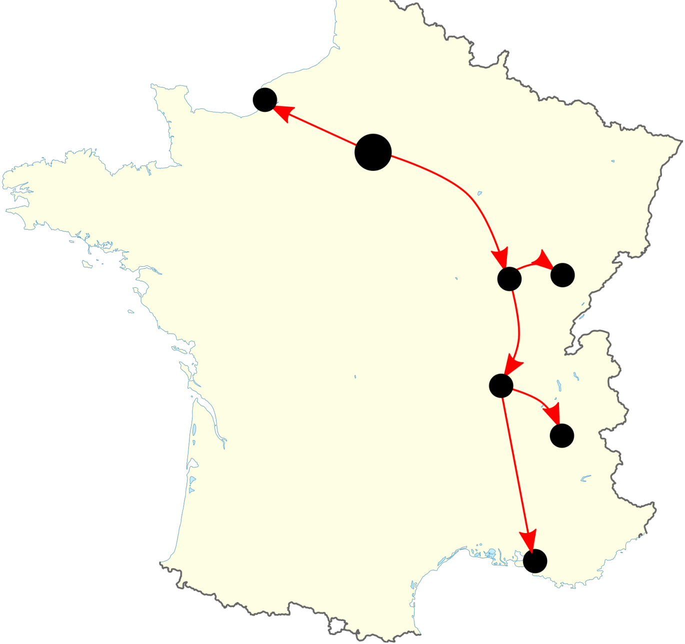
G contient k arbres couvrants arête-disjoints
(un **packing** de k arbres couvrants).



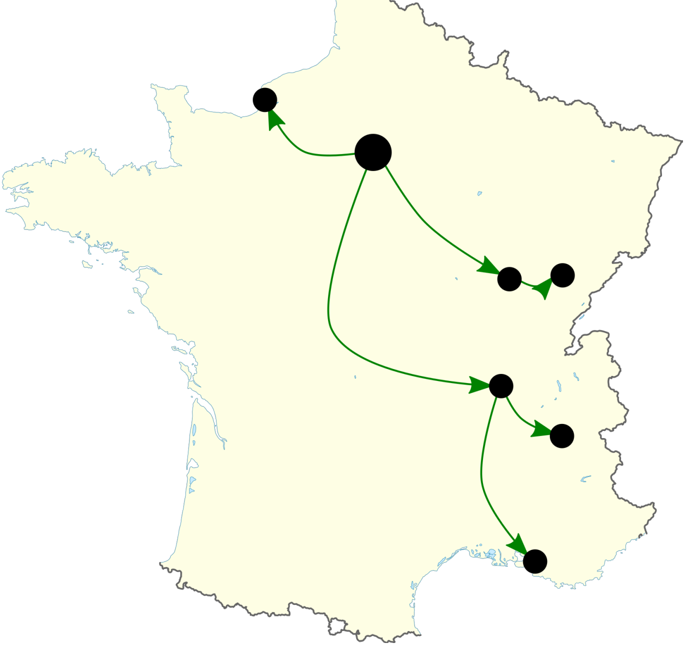
$\vec{G}$ est 3-arc-connexe depuis Paris.



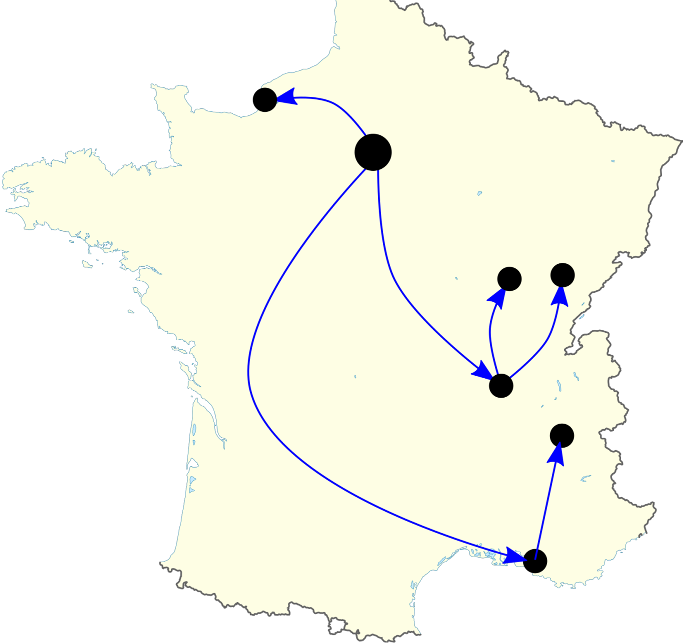
$\vec{G}$ a un packing de 3 arborescences couvrantes.



$\vec{G}$ a un packing de 3 arborescences couvrantes.



$\vec{G}$ a un packing de 3 arborescences couvrantes.



$\vec{G}$ a un packing de 3 arborescences couvrantes.

Problème : s'il y a une grève des trains, il est possible qu'il n'y ait plus aucun chemin utilisable.
$\Longrightarrow$ On souhaite des chemins disjoints qui utilisent des moyens de transport différents.

Matroïde

Problème : s'il y a une grève des trains, il est possible qu'il n'y ait plus aucun chemin utilisable.
$\Longrightarrow$ On souhaite des chemins disjoints qui utilisent des moyens de transport différents.

But : étudier une notion de connexité où l'on souhaite des chemins disjoints et **indépendants**.
Il existe une « théorie de l'indépendance » : la théorie des **matroïdes**.

Matroïde

Définition

Un **matroïde** est un couple $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ où :

1. S est un ensemble d'**éléments**.
2. $\mathcal{I}$ un ensemble de parties de S appelés **indépendants** vérifiant :
   - $\emptyset \in \mathcal{I}$.
   - $I \subseteq J \in \mathcal{I} \implies I \in \mathcal{I}$.
   - $I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| < |J| \implies \exists j \in J - I,\ I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$.

Matroïde

Définition

Un **matroïde** est un couple $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ où :

1. S est un ensemble d'**éléments**.
2. $\mathcal{I}$ un ensemble de parties de S appelés **indépendants** vérifiant :
   - $\emptyset \in \mathcal{I}$.
   - $I \subseteq J \in \mathcal{I} \implies I \in \mathcal{I}$.
   - $I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| < |J| \implies \exists j \in J - I,\ I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$.

Définition

- Une **base** de $\mathcal{M}$ est un indépendant de taille maximum.
- Le **rang** $\boldsymbol{r(\mathcal{M})}$ de $\mathcal{M}$ est la taille d'une de ses bases.
- Deux éléments de s_1, s_2 de $\mathcal{M}$ sont **parallèles** si $\{s_1, s_2\} \notin \mathcal{I}$.

Connexité avec contraintes de matroïdes

Soit $\mathcal{M}$ un matroïde.

Définition

Un $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-graphe** (orienté) est un graphe (orienté) avec une racine r dont les arcs sortant sont identifiés avec les éléments de $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M}$ un matroïde.

Définition

Un $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-graphe** (orienté) est un graphe (orienté) avec une racine r dont les arcs sortant sont identifiés avec les éléments de $\mathcal{M}$.

Définition

Un $\mathcal{M}$-graphe orienté $\vec{\mathcal{G}}$ enraciné en r est $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-arc-connexe** si tout sommet $v \neq r$ est atteignable depuis r par des chemins arc-disjoints dont les premiers arcs forment une base de $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M}$ un matroïde.

Définition

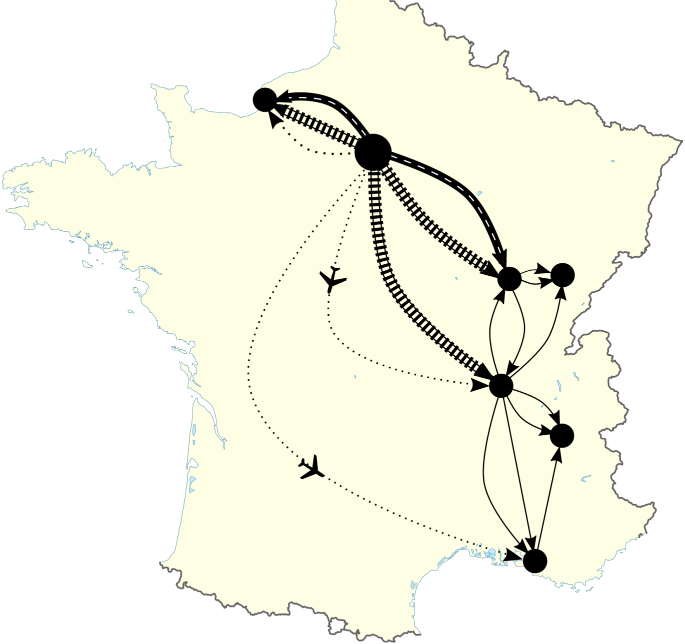
Un $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-graphe** (orienté) est un graphe (orienté) avec une racine r dont les arcs sortant sont identifiés avec les éléments de $\mathcal{M}$.

Définition

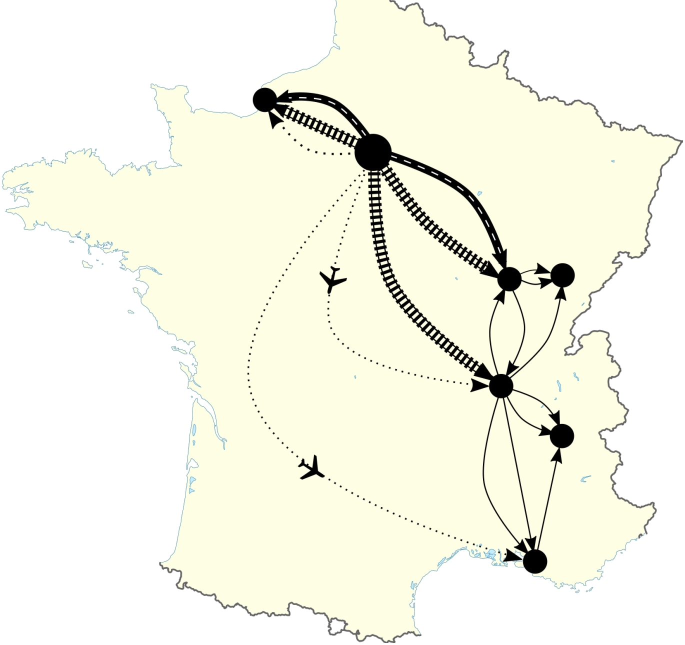
Un $\mathcal{M}$-graphe orienté $\vec{\mathcal{G}}$ enraciné en r est $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-arc-connexe** si tout sommet $v \neq r$ est atteignable depuis r par des chemins arc-disjoints dont les premiers arcs forment une base de $\mathcal{M}$.

Définition

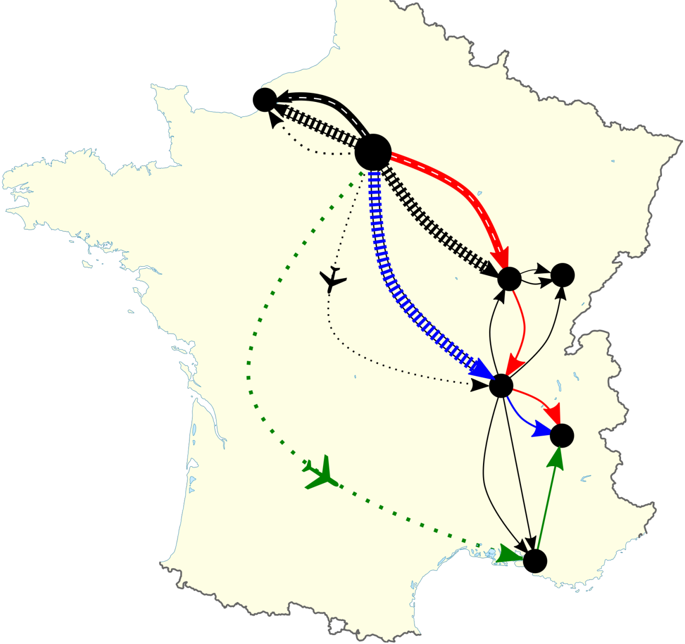
Un $\mathcal{M}$-graphe $\mathcal{G}$ est $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-partition-connexe** s'il possède une orientation $\mathcal{M}$-arc-connexe.



Un $\mathcal{M}$-graphe orienté, où des arcs sortant de Paris sont indépendants s'ils utilisent des transports différents.



Ce $\mathcal{M}$-graphe est $\mathcal{M}$-arc-connexe.



Exemple : il y a 3 chemins « indépendants » de Paris vers Grenoble.

Packing avec contraintes de matroïdes

Définition

Un packing de r-arborescences est un $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-packing** si, pour tout sommet $v \neq r$, les premiers arcs des chemins utilisant ces arborescences forment une base du matroïde $\mathcal{M}$.

Packing avec contraintes de matroïdes

Définition

Un packing de r-arborescences est un $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-packing** si, pour tout sommet $v \neq r$, les premiers arcs des chemins utilisant ces arborescences forment une base du matroïde $\mathcal{M}$.

Problématique de la thèse

Est-ce que les théorèmes d'Edmonds et Tutte restent vrais avec contraintes de matroïdes ?

Packing avec contraintes de matroïdes

Durand de Gevigney, Nguyen et Szigeti ont prouvé un théorème de packing qui ne garantit pas que les arborescences soient couvrantes :

Théorème (Durand de Gevigney, Nguyen et Szigeti, 2013)

$\vec{\mathcal{G}}$ est $\mathcal{M}$-arc-connexe.

$$\Longleftrightarrow$$

$\vec{\mathcal{G}}$ contient un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences.

Packing avec contraintes de matroïdes

Durand de Gevigney, Nguyen et Szigeti ont prouvé un théorème de packing qui ne garantit pas que les arborescences soient couvrantes :

Théorème (Durand de Gevigney, Nguyen et Szigeti, 2013)

$\vec{\mathcal{G}}$ est $\mathcal{M}$-arc-connexe.

$$\Longleftrightarrow$$

$\vec{\mathcal{G}}$ contient un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences.

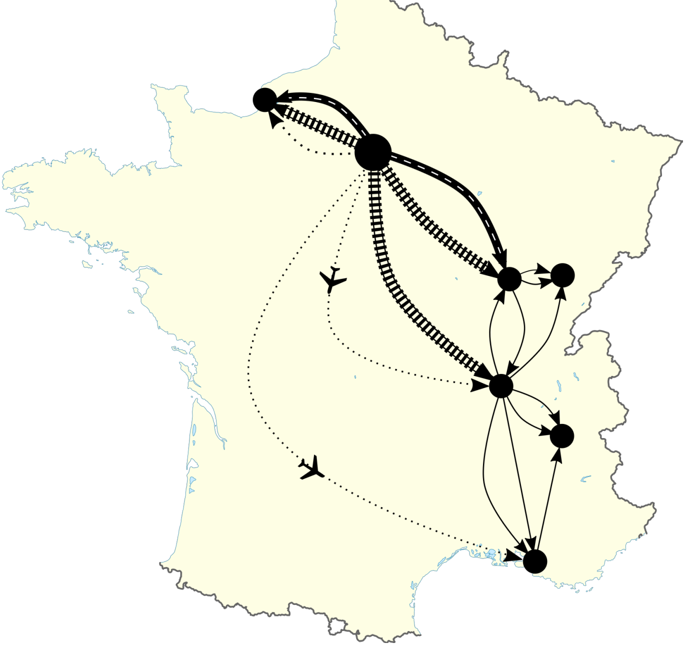
Ce qui implique la version non orientée, démontrée initialement par Katoh et Tanigawa :

Théorème (Katoh et Tanigawa, 2013)

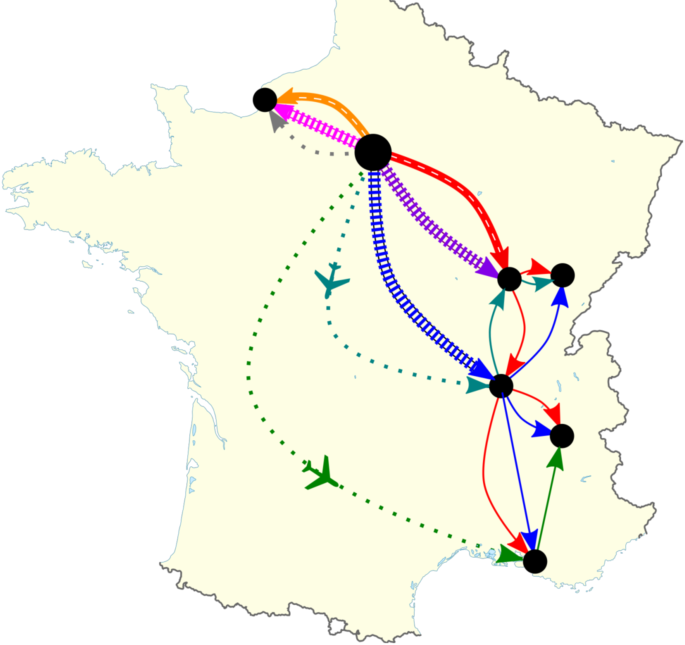
$\mathcal{G}$ est $\mathcal{M}$-partition-connexe.

$$\Longleftrightarrow$$

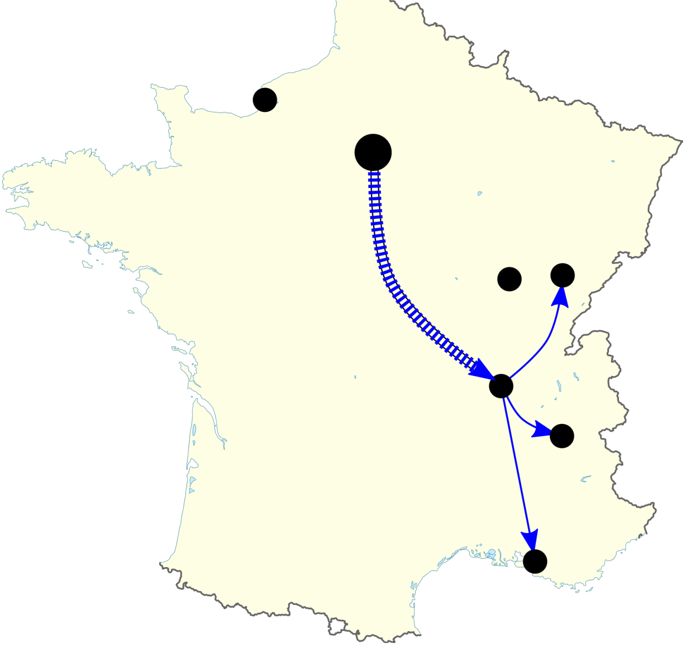
$\mathcal{G}$ contient un $\mathcal{M}$-packing d'arbres.



Ce $\mathcal{M}$-graphe est $\mathcal{M}$-arc-connexe.



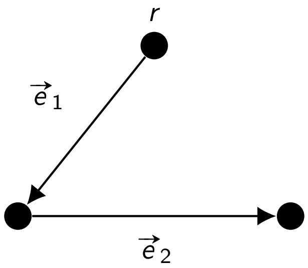
Un $\mathcal{M}$-packing de 8 arborescences, non couvrantes.



Exemple : l'arborescence bleue n'est pas couvrante.

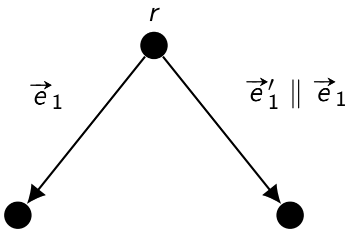
Packing avec contraintes de matroïdes

Durand de Gevigney, Nguyen et Szigeti ont utilisé une opération de réduction sur deux arcs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ d'un $\mathcal{M}$-graphe orienté :



Avant l'opération.

Durand de Gevigney, Nguyen et Szigeti ont utilisé une opération de réduction sur deux arcs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ d'un $\mathcal{M}$-graphe orienté :



Après l'opération.
$\vec{e}\,'_1$ est un nouvel arc parallèle à $\vec{e}_1$ dans $\mathcal{M}$.

Packing avec contraintes de matroïdes

Construction des graphes $\mathcal{M}$-arc-connexes

Soit $\vec{\mathcal{G}}$ $\mathcal{M}$-arc-connexe.

Exactement l'une des propositions suivantes est vraie :

1. Tous les arcs de $\vec{\mathcal{G}}$ sortent de la racine.
2. On peut réduire $\vec{\mathcal{G}}$ en un $\mathcal{M}'$-arc-connexe $\mathcal{M}'$-graphe.

Packing avec contraintes de matroïdes

Construction des graphes $\mathcal{M}$-arc-connexes

Soit $\vec{\mathcal{G}}$ $\mathcal{M}$-arc-connexe.
Exactement l'une des propositions suivantes est vraie :

1. Tous les arcs de $\vec{\mathcal{G}}$ sortent de la racine.
2. On peut réduire $\vec{\mathcal{G}}$ en un $\mathcal{M}'$-arc-connexe $\mathcal{M}'$-graphe.

Ce qui permet de prouver par récurrence :

Théorème (Durand de Gevigney, Nguyen et Szigeti, 2013)

$$\vec{\mathcal{G}} \text{ est } \mathcal{M}\text{-arc-connexe.}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\vec{\mathcal{G}} \text{ contient un } \mathcal{M}\text{-packing d'arborescences.}$$

Packing avec contraintes de matroïdes

Frank, Bérczi, T. Király et Kobayashi ont conjecturé que le théorème d'Edmonds reste vrai avec contraintes de matroïdes :

Conjecture de Frank

$\vec{\mathcal{G}}$ est $\mathcal{M}$-arc-connexe.

$$\Longleftrightarrow$$

$\vec{\mathcal{G}}$ contient un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences **couvrantes**.

Packing avec contraintes de matroïdes

Frank, Bérczi, T. Király et Kobayashi ont conjecturé que le théorème d'Edmonds reste vrai avec contraintes de matroïdes :

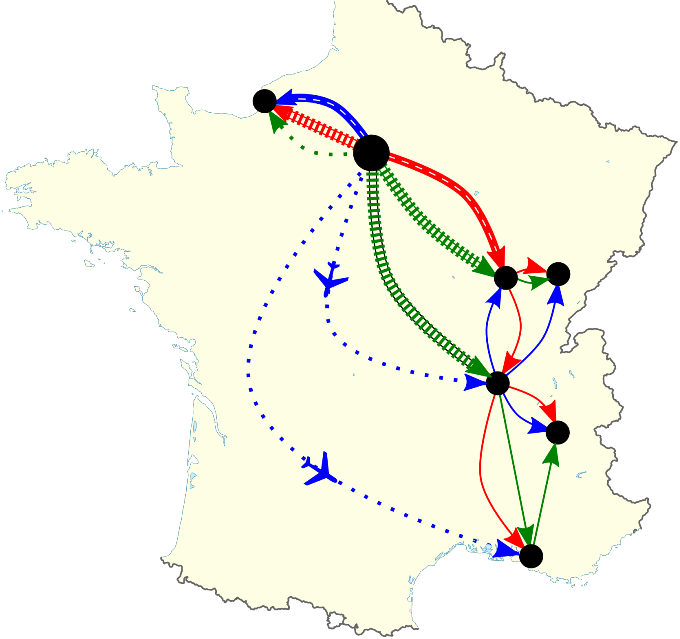
Conjecture de Frank

$$\vec{\mathcal{G}} \text{ est } \mathcal{M}\text{-arc-connexe.}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\vec{\mathcal{G}} \text{ contient un } \mathcal{M}\text{-packing d'arborescences } \textbf{couvrantes}.$$

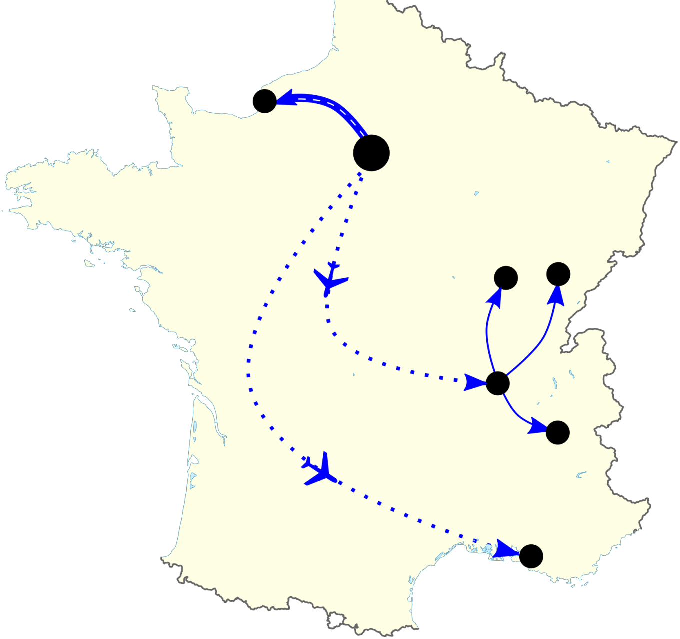
Cette conjecture impliquerait une version non orientée, généralisant le théorème de Tutte :

Conjecture de Frank, non orienté

$$\mathcal{G} \text{ est } \mathcal{M}\text{-partition-connexe.}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{G} \text{ contient un } \mathcal{M}\text{-packing d'arbres } \textbf{couvrants}.$$

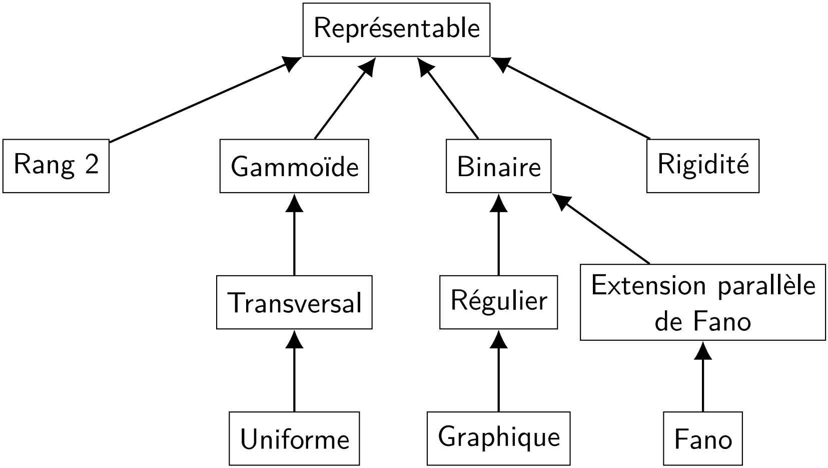


Un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes.

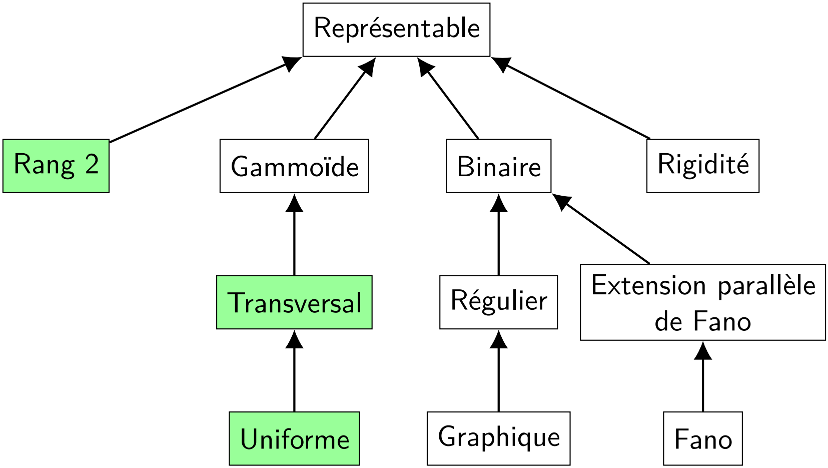


Exemple : l'arborescence bleue est couvrante.

Quelques matroïdes classiques (un arc représente une inclusion) :

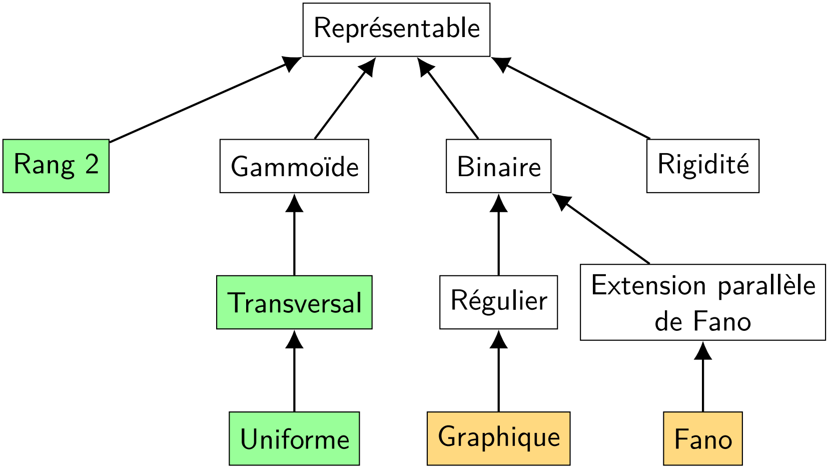


1. **Prouver** la conjecture de Frank pour certains matroïdes.



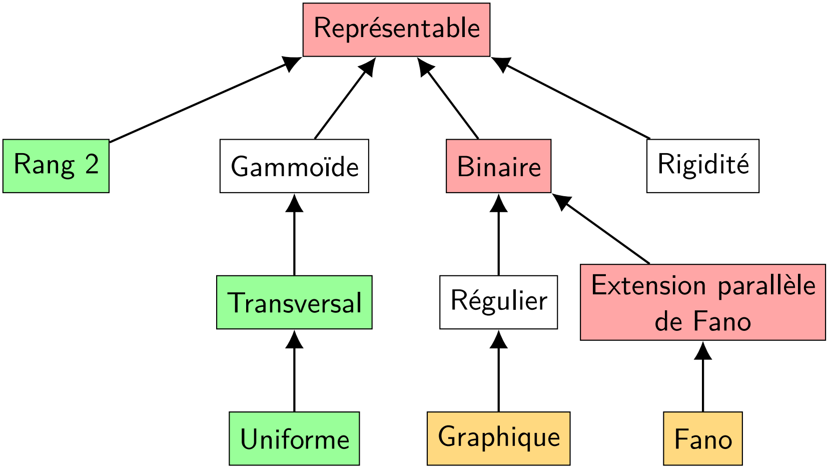
Plan de la thèse

2 **Prouver** la conjecture de Frank pour les graphes acycliques et certains matroïdes.



Plan de la thèse

3. **Réfuter** la conjecture de Frank pour certains matroïdes (et donc dans le cas général).



Matroïde de rang 2

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

$\vec{\mathcal{G}}$ est $\mathcal{M}$-arc-connexe, avec $\boldsymbol{r(\mathcal{M}) = 2}$.

$$\iff$$

$\vec{\mathcal{G}}$ contient un $\mathcal{M}$-packing de 2 arborescences couvrantes.

Matroïde de rang 2

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

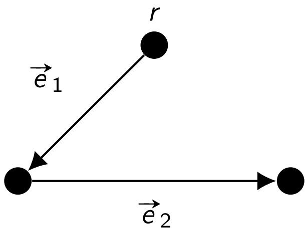
$\vec{\mathcal{G}}$ est $\mathcal{M}$-arc-connexe, avec $\boldsymbol{r(\mathcal{M}) = 2}$.

$\Longleftrightarrow$

$\vec{\mathcal{G}}$ contient un $\mathcal{M}$-packing de 2 arborescences couvrantes.

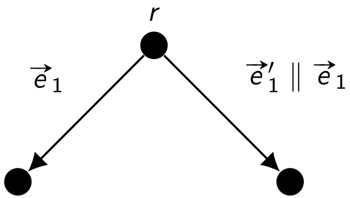
Preuve :
Par récurrence, en utilisant la construction des $\mathcal{M}$-graphes orientés $\mathcal{M}$-arc-connexes.

Matroïde de rang 2



Soit $\vec{\mathcal{G}}$ un $\mathcal{M}$-graphe $\mathcal{M}$-arc-connexe.

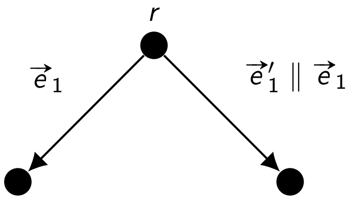
Matroïde de rang 2



Soit $\vec{\mathcal{G}}$ un $\mathcal{M}$-graphe $\mathcal{M}$-arc-connexe.

$\vec{\mathcal{G}}$ peut être réduit en un $\mathcal{M}'$-graphe $\mathcal{M}'$-arc-connexe $\vec{\mathcal{G}}'$.

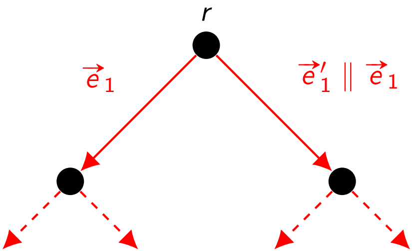
Matroïde de rang 2



Par hypothèse de récurrence :

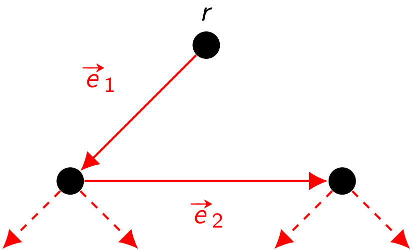
$\vec{\mathcal{G}}'$ possède un $\mathcal{M}'$-packing d'arborescences couvrantes $\color{red}{\vec{T}_1}$, $\color{blue}{\vec{T}_2}$.

Matroïde de rang 2



Cas 1 : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_1'$ appartiennent à la même arborescence $\vec{T}_1$.

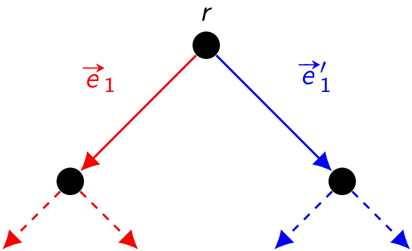
Matroïde de rang 2



<u>Cas 1</u> : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}'_1$ appartiennent à la même arborescence $\vec{T}_1$.

$\vec{T}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}'_1$ et $\vec{T}_2$ est un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes dans $\vec{\mathcal{G}}$.

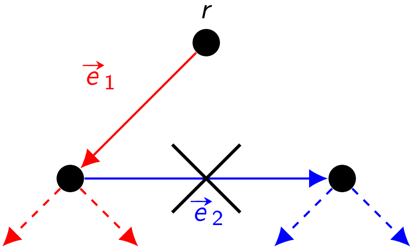
Matroïde de rang 2



Cas 2 : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}'_1$ sont dans deux arborescences différentes.

Disons $\vec{e}_1 \in \vec{T}_1$ et $\vec{e}'_1 \in \vec{T}_2$.

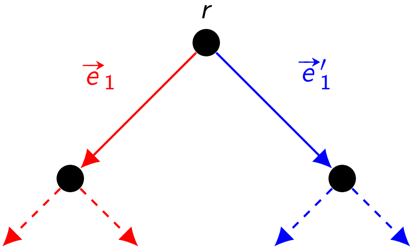
Matroïde de rang 2



<u>Cas 2</u> : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}'_1$ sont dans deux arborescences différentes.

$\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2 + \vec{e}_2 - \vec{e}'_1$ **n'est pas** forcément un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes dans $\vec{\mathcal{G}}$.

Matroïde de rang 2



Cas 2 : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}\,'_1$ sont dans deux arborescences différentes.

Pour revenir au cas 1, il faudrait changer la couleur de $\vec{e}\,'_1$ sans changer celle de $\vec{e}_1$.

Lemme d'échange

Soit $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes.

Lemme d'échange

Soit $\overrightarrow{T}_1$, $\overrightarrow{T}_2$ un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes.
Soit $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{T}_2$ un arc sortant de r et $V_{\overrightarrow{e}}$ l'ensemble des sommets atteignables dans $\overrightarrow{T}_2$ depuis un arc parallèle à $\overrightarrow{e}$.

Lemme d'échange

Soit $\overrightarrow{T}_1$, $\overrightarrow{T}_2$ un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes.
Soit $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{T}_2$ un arc sortant de r et $V_{\overrightarrow{e}}$ l'ensemble des sommets atteignables dans $\overrightarrow{T}_2$ depuis un arc parallèle à $\overrightarrow{e}$.
Échangeons les couleurs des arcs entrant dans un sommet de $V_{\overrightarrow{e}}$.

Lemme d'échange

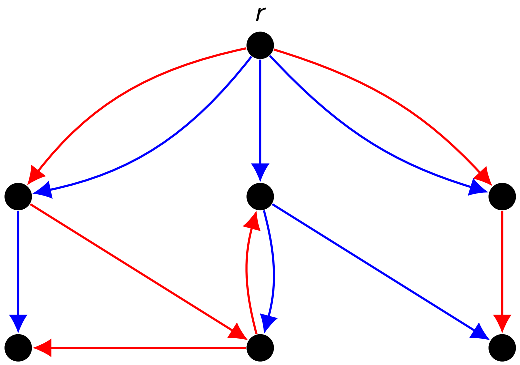
Soit $\overrightarrow{T}_1$, $\overrightarrow{T}_2$ un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes.
Soit $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{T}_2$ un arc sortant de r et $V_{\overrightarrow{e}}$ l'ensemble des sommets atteignables dans $\overrightarrow{T}_2$ depuis un arc parallèle à $\overrightarrow{e}$.
Échangeons les couleurs des arcs entrant dans un sommet de $V_{\overrightarrow{e}}$.

Alors :

Lemme d'échange

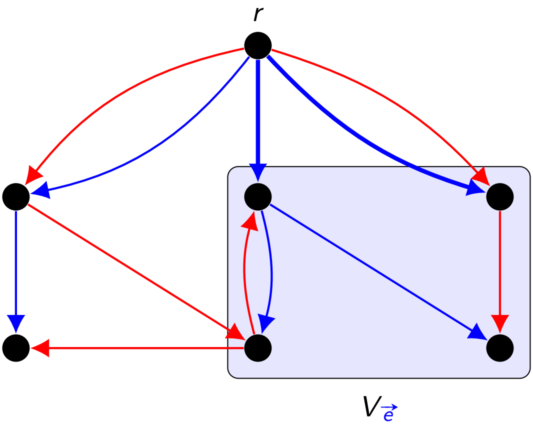
1. Les arcs rouges forment une arborescence couvrante $\overrightarrow{T}'_1$.
2. Les arcs bleus forment une arborescence couvrante $\overrightarrow{T}'_2$.
3. $\overrightarrow{T}'_1$, $\overrightarrow{T}'_2$ est un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes.

Lemme d'échange



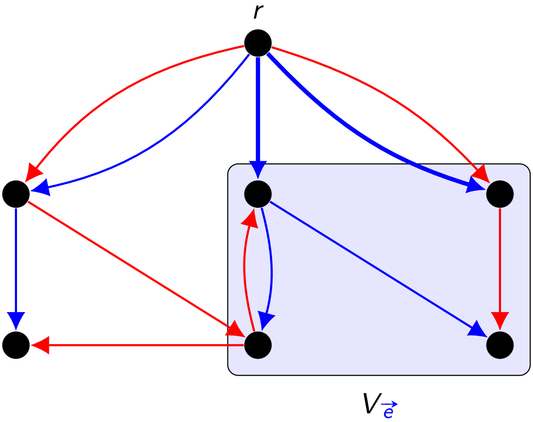
Un $\mathcal{M}$-packing $\overrightarrow{T}_1$, $\overrightarrow{T}_2$ d'arborescences couvrantes.

Lemme d'échange



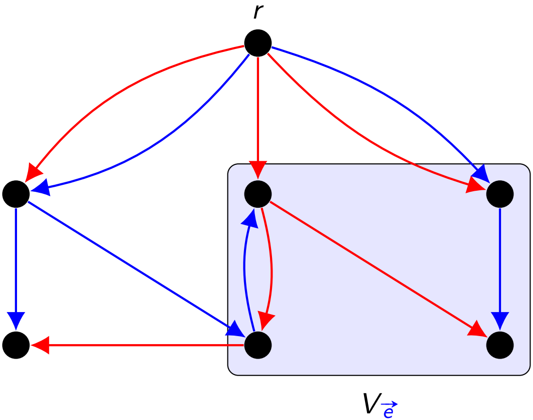
Soit $V_{\vec{e}}$ l'ensemble des sommets atteignables dans $\overrightarrow{T}_2$ depuis un arc parallèle à $\vec{e} \in \overrightarrow{T}_2$.

Lemme d'échange



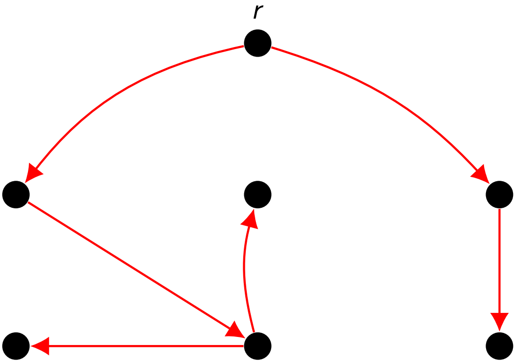
On échange les couleurs des arcs entrant dans un sommet de $V_{\vec{e}}$.

Lemme d'échange



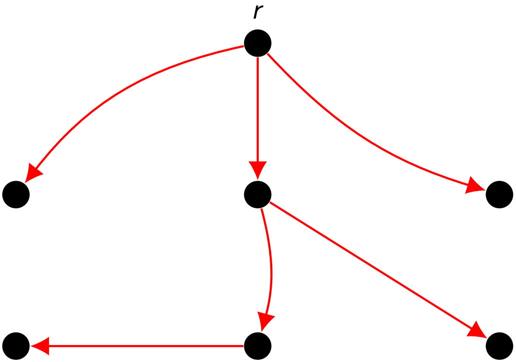
On obtient un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes $\vec{T}'_1$, $\vec{T}'_2$.

Lemme d'échange



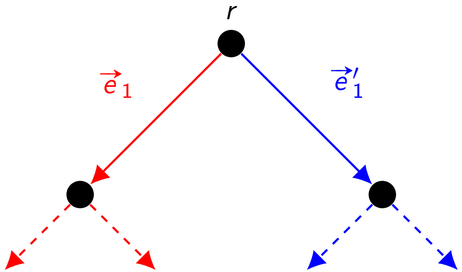
Avant échange : $\vec{T}_1$

Lemme d'échange



Après échange : $\overrightarrow{T}'_1$

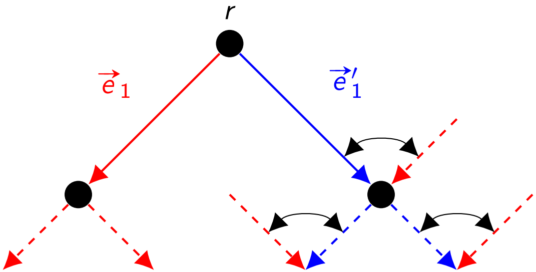
Matroïde de rang 2



Cas 2 : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}'_1$ sont dans deux arborescences différentes.

Pour revenir au cas 1, il faudrait changer la couleur de $\vec{e}'_1$ sans changer celle de $\vec{e}_1$.

Matroïde de rang 2



Cas 2 : $\vec{e}_1$ et $\vec{e}'_1$ sont dans deux arborescences différentes.

On applique le lemme d'échange sur $\vec{e}'_1$ et on se ramène au cas 1.

Graphe acyclique

Graphe acyclique

Lemme

Un graphe acyclique possède un **puits** : un sommet d'où ne sort aucun arc.

Graphe acyclique

Lemme

Un graphe acyclique possède un **puits** : un sommet d'où ne sort aucun arc.

La suppression d'un puits dans un graphe acyclique donne à nouveau un graphe acyclique, d'où :

Lemme

Tout graphe acyclique peut être obtenu à partir d'un sommet isolé en rajoutant successivement des puits.

Graphe acyclique

Construction des graphes acycliques k-arc-connexes enracinés

$\vec{G}$ est un graphe acyclique minimalement k-arc-connexe depuis r.

$$\Longleftrightarrow$$

$\vec{G}$ peut être construit à partir de r en ajoutant itérativement un puits et k arcs y entrant.

Graphe acyclique

Construction des graphes acycliques $\mathcal{M}$-arc-connexes

$\vec{\mathcal{G}}$ est un $\mathcal{M}$-graphe acyclique minimalement $\mathcal{M}$-arc-connexe depuis r.

$$\Longleftrightarrow$$

$\vec{\mathcal{G}}$ peut être construit à partir de r en ajoutant itérativement un puits et $r(\mathcal{M})$ arcs y entrant, ceux sortant de r étant indépendants.

Graphe acyclique

Cette construction donne une preuve « gloutonne » simple du théorème d'Edmonds pour les graphes acycliques, par induction :

1. Commencer avec k arborescences contenant uniquement la racine.
2. Ajouter itérativement un puits en assignant chaque arc y entrant à une arborescence différente.

Graphe acyclique

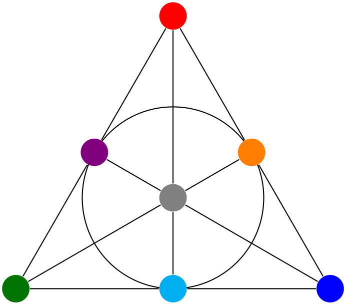
Cette construction donne une preuve « gloutonne » simple du théorème d'Edmonds pour les graphes acycliques, par induction :

1. Commencer avec k arborescences contenant uniquement la racine.
2. Ajouter itérativement un puits en assignant chaque arc y entrant à une arborescence différente.

Question

Peut-on faire de même avec les graphes acycliques $\mathcal{M}$-arc-connexes ?

Matroïde de Fano



Le matroïde de Fano $\mathcal{F}_7$ possède :

- 7 éléments : les sommets en couleurs.
- 28 bases : les triplets non alignés (le cercle étant considéré comme une ligne).

Graphe acyclique et matroïde de Fano

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

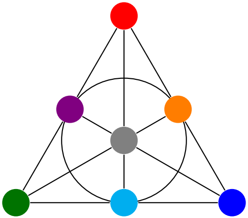
Soit $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ acyclique :

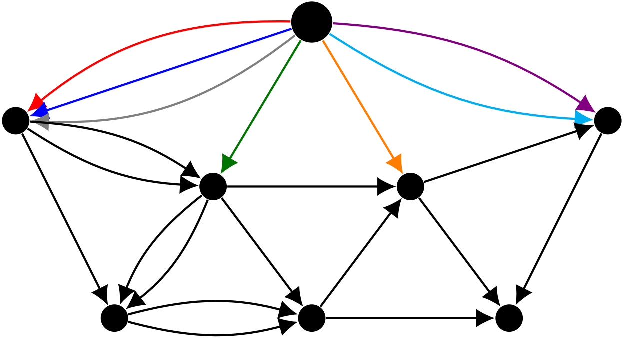
$$\overrightarrow{\mathcal{G}} \text{ est } \mathcal{F}_7\text{-arc-connexe depuis } r.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\overrightarrow{\mathcal{G}} \text{ a un } \mathcal{F}_7\text{-packing d'arborescences couvrantes.}$$

Preuve : par étude exhaustive, on montre que la méthode gloutonne précédente fonctionne.

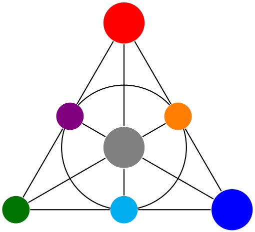
Donnons un exemple.

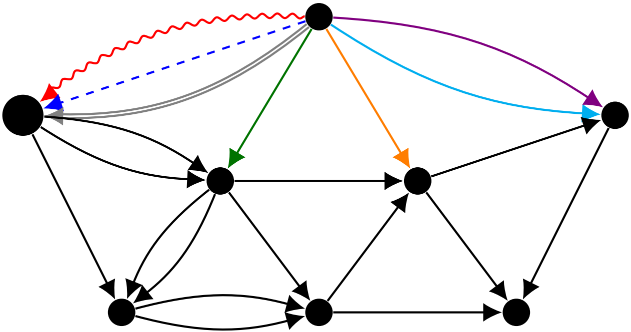
Graphe acyclique et matroïde de Fano



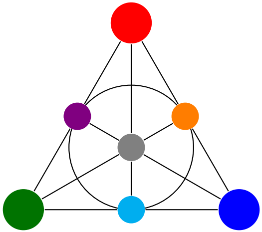


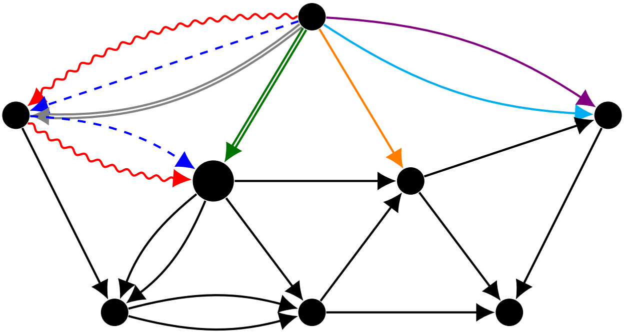
Graphe acyclique et matroïde de Fano



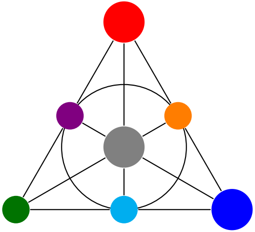


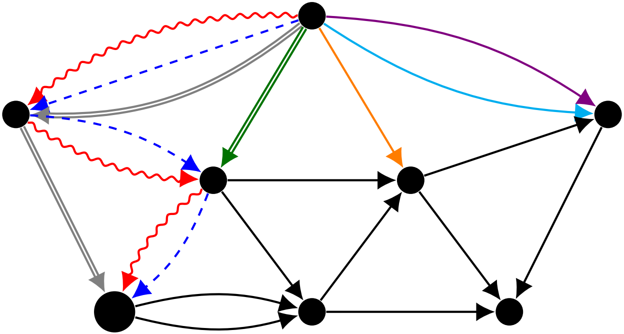
Graphe acyclique et matroïde de Fano



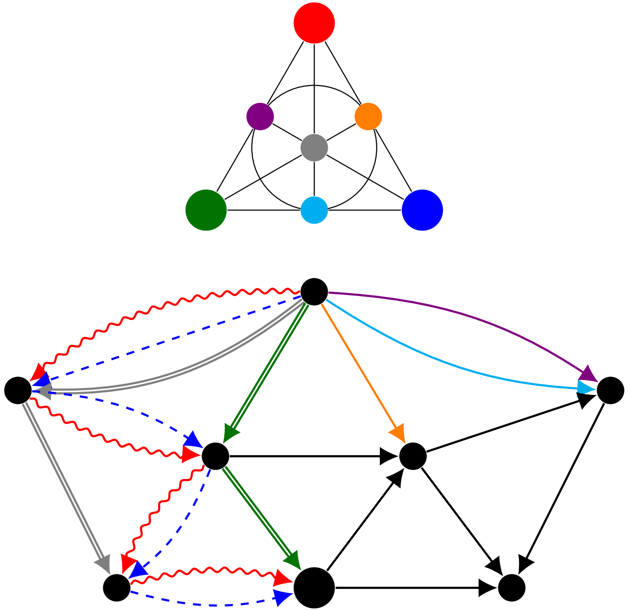


Graphe acyclique et matroïde de Fano

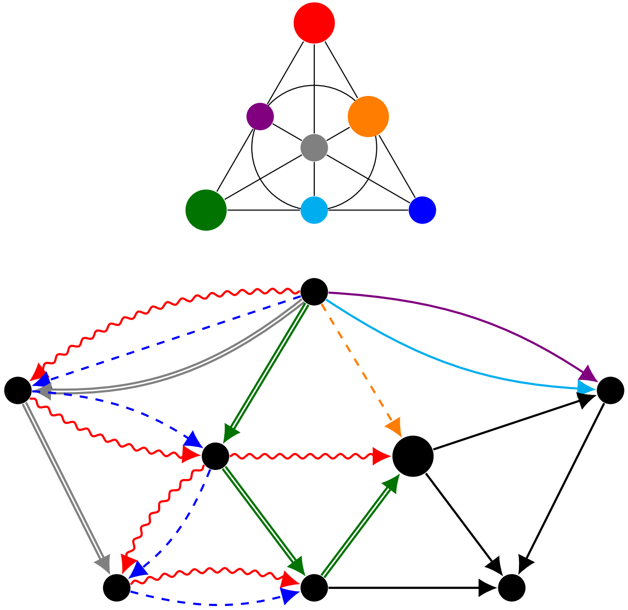




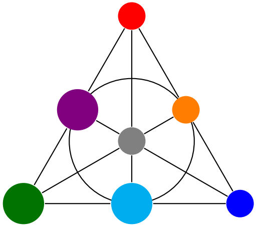
Graphe acyclique et matroïde de Fano

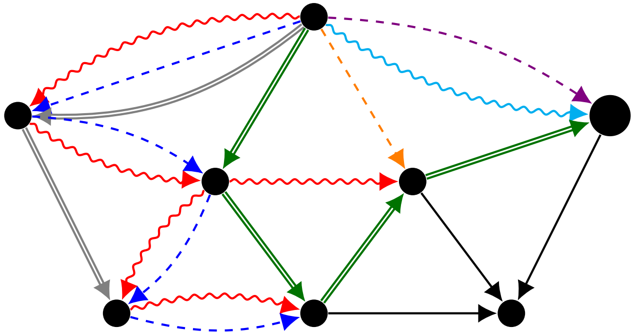


Graphe acyclique et matroïde de Fano

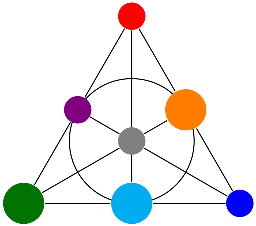


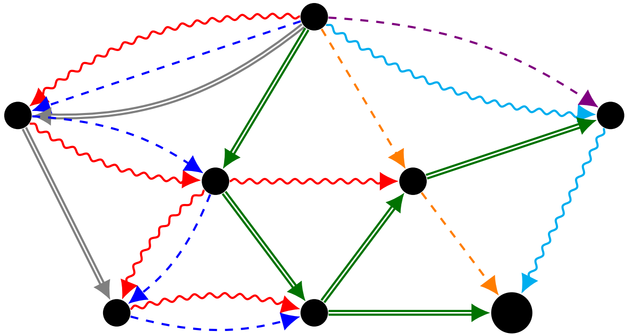
Graphe acyclique et matroïde de Fano



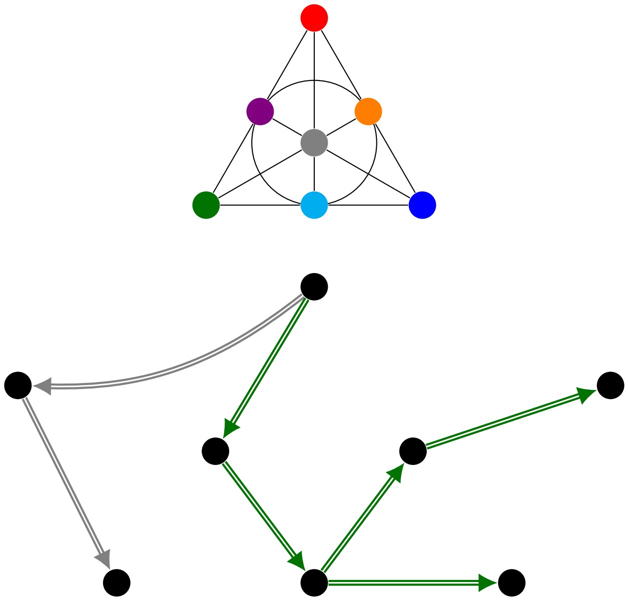


Graphe acyclique et matroïde de Fano

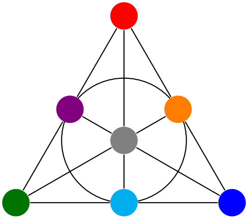


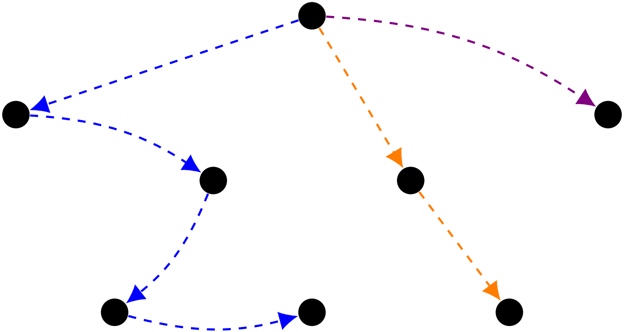


Graphe acyclique et matroïde de Fano

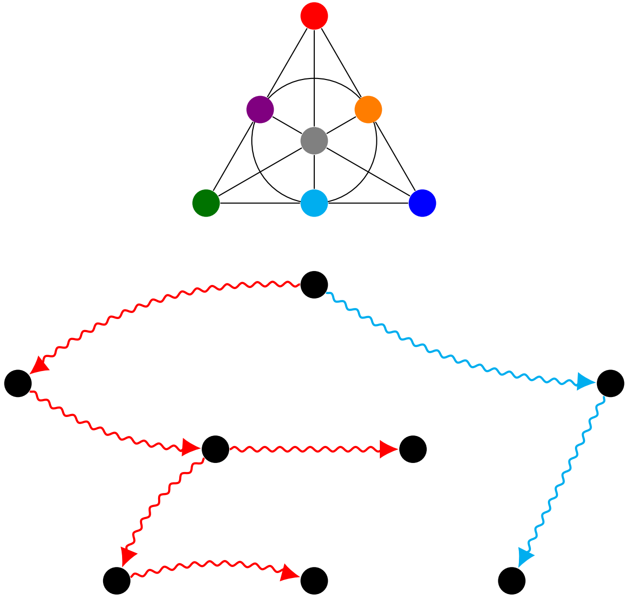


Graphe acyclique et matroïde de Fano





Graphe acyclique et matroïde de Fano



Graphe acyclique

Question

Cette méthode gloutonne fonctionne-t-elle pour tout $\vec{\mathcal{G}}$ $\mathcal{M}$-arc-connexe acyclique, avec $\mathcal{M}$ matroïde quelconque ?

Graphe acyclique

Question

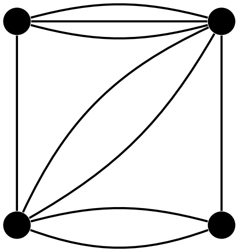
Cette méthode gloutonne fonctionne-t-elle pour tout $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ $\mathcal{M}$-arc-connexe acyclique, avec $\mathcal{M}$ matroïde quelconque ?

Réponse : non, par exemple pour les matroïdes graphiques.

Matroïde graphique

Un matroïde $\mathcal{M}$ est **graphique** s'il existe un graphe G tel que :

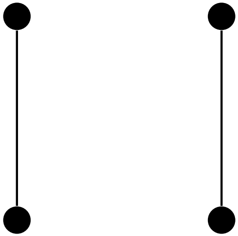
- les éléments de $\mathcal{M}$ sont les arêtes de G.
- les indépendants de $\mathcal{M}$ sont les ensembles d'arêtes sans cycle.



Matroïde graphique

Un matroïde $\mathcal{M}$ est **graphique** s'il existe un graphe G tel que :

- les éléments de $\mathcal{M}$ sont les arêtes de G.
- les indépendants de $\mathcal{M}$ sont les ensembles d'arêtes sans cycle.

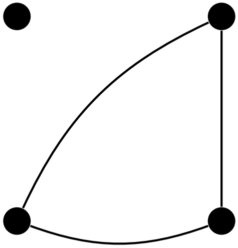


Un ensemble indépendant

Matroïde graphique

Un matroïde $\mathcal{M}$ est **graphique** s'il existe un graphe G tel que :

- les éléments de $\mathcal{M}$ sont les arêtes de G.
- les indépendants de $\mathcal{M}$ sont les ensembles d'arêtes sans cycle.

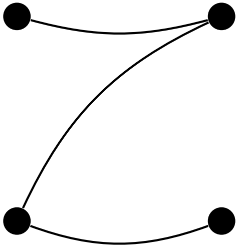


Un ensemble non indépendant

Matroïde graphique

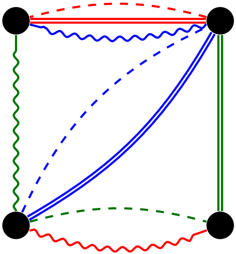
Un matroïde $\mathcal{M}$ est **graphique** s'il existe un graphe G tel que :

- les éléments de $\mathcal{M}$ sont les arêtes de G.
- les indépendants de $\mathcal{M}$ sont les ensembles d'arêtes sans cycle.

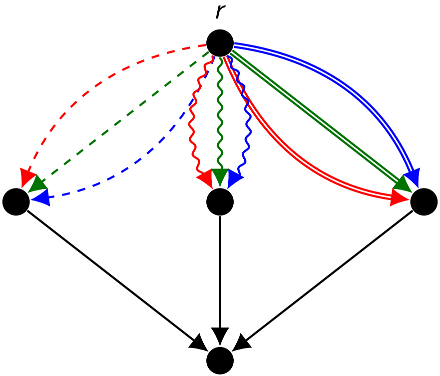


Une base : un arbre couvrant

Graphe acyclique et matroïde graphique

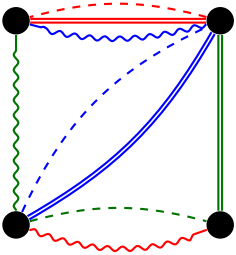


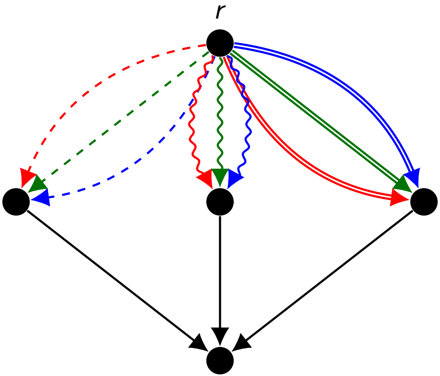
Matroïde graphique $\mathcal{M}$



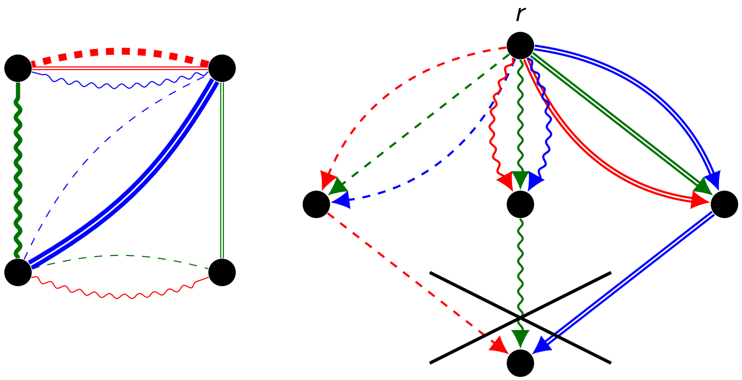
$\vec{\mathcal{G}}$ $\mathcal{M}$-arc-connexe

Graphe acyclique et matroïde graphique





Il est impossible de compléter les arborescences $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$.



Il est impossible de compléter les arborescences $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$.

Lorsque l'on échoue à prouver un théorème par induction...
... on peut essayer de renforcer le théorème jusqu'à ce que l'induction fonctionne.

> **Inventor's paradox :**
> The more ambitious plan may have more chances of success.
>
> – George Pólya, How to Solve It.

Graphe acyclique et matroïde graphique

Soit $\{0, 1, ..., k\}$ les sommets du graphe représentant un matroïde graphique $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$.

Graphe acyclique et matroïde graphique

Soit $\{0, 1, ..., k\}$ les sommets du graphe représentant un matroïde graphique $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$.

On arrive alors à prouver par induction :

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

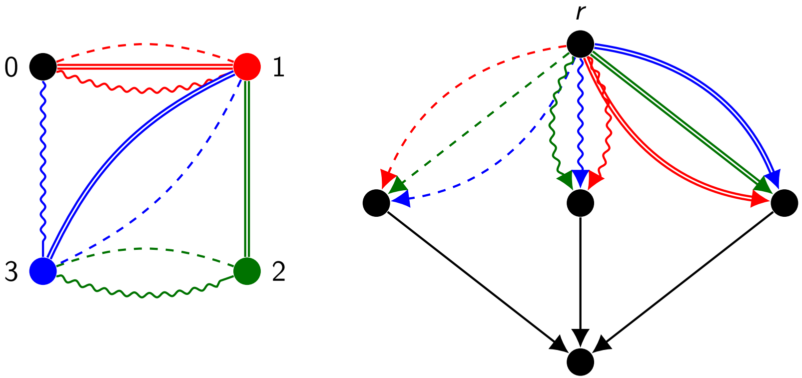
Soit $\vec{\mathcal{G}}$ un $\mathcal{M}$-graphe orienté acyclique :

$\vec{\mathcal{G}}$ est $\mathcal{M}$-arc-connexe depuis r.

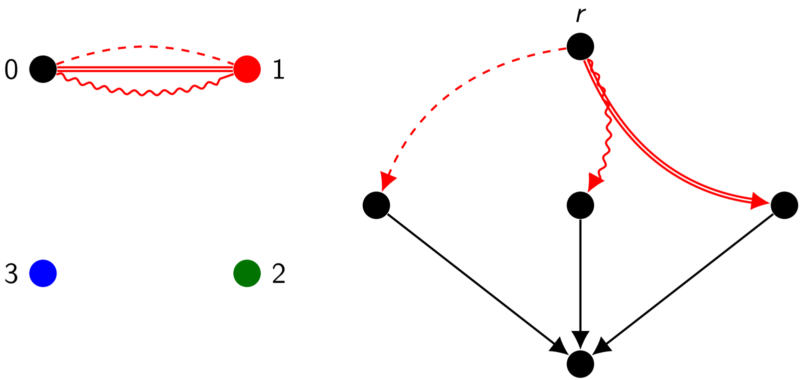
$$\iff$$

$\vec{\mathcal{G}}$ a un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes $\overrightarrow{T_1}$, ..., $\overrightarrow{T_k}$ telles que :
$\boldsymbol{\forall e \in S \cap \overrightarrow{T_i}}$**,** $\boldsymbol{e}$ **est adjacent au sommet** $\boldsymbol{i}$.

Graphe acyclique et matroïde graphique

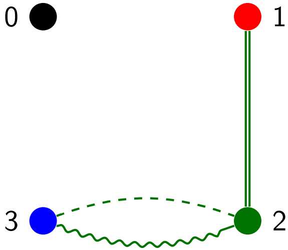


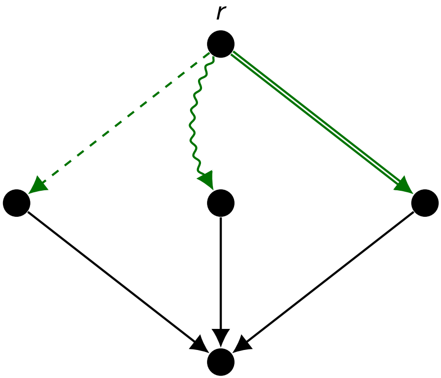
3 arborescences $\color{red}{\overrightarrow{T}_1}$, $\color{green}{\overrightarrow{T}_2}$, $\color{blue}{\overrightarrow{T}_3}$ telles que $\forall e \in S \cap \overrightarrow{T}_i$, e est adjacent au sommet i.



3 arborescences $\color{red}{\vec{T}_1}$, , telles que $\forall e \in S \cap \vec{T}_i$, e est adjacent au sommet i.

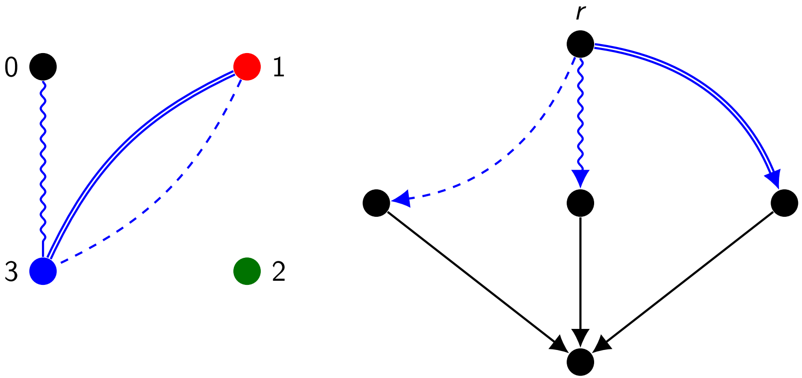
Graphe acyclique et matroïde graphique



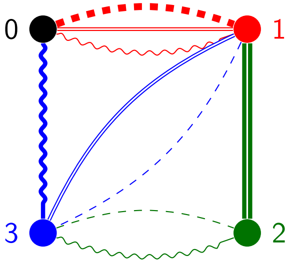


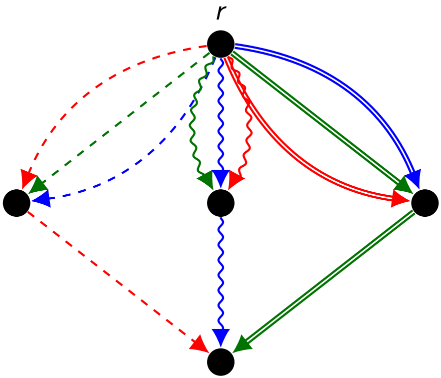
3 arborescences , $\overrightarrow{T}_2$, telles que $\forall e \in S \cap \overrightarrow{T}_i$, e est adjacent au sommet i.

Graphe acyclique et matroïde graphique



3 arborescences , , $\overrightarrow{T}_3$ telles que $\forall e \in S \cap \overrightarrow{T_i}$, e est adjacent au sommet i.





On peut toujours compléter de telles arborescences $\color{red}{\vec{T}_1}$, $\color{green}{\vec{T}_2}$, $\color{blue}{\vec{T}_3}$.

Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté

Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté

Nous allons construire un $\mathcal{M}$-graphe $\mathcal{G}$ tel que :

- $\mathcal{M}$ est obtenu à partir du matroïde de Fano en ajoutant des éléments parallèles.
- $\mathcal{G}$ est $\mathcal{M}$-partition-connexe.
- $\mathcal{G}$ ne possède pas de $\mathcal{M}$-packing d'arbres couvrants.

Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté

Nous allons construire un $\mathcal{M}$-graphe $\mathcal{G}$ tel que :

- $\mathcal{M}$ est obtenu à partir du matroïde de Fano en ajoutant des éléments parallèles.
- $\mathcal{G}$ est $\mathcal{M}$-partition-connexe.
- $\mathcal{G}$ ne possède pas de $\mathcal{M}$-packing d'arbres couvrants.

Nous allons implémenter des opérations :

- préservant la partition-connexité.
- ajoutant des contraintes à un éventuel $\mathcal{M}$-packing d'arbres couvrants.

Base forcée

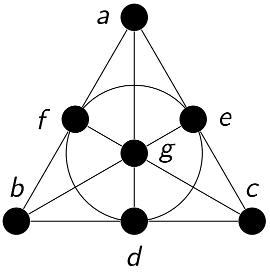
Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{M}$-graphe et B une base de $\mathcal{M}$.

Définition

B est une **base forcée** pour un sommet v si, dans tout $\mathcal{M}$-packing d'arbres couvrants de $\mathcal{G}$, B est l'ensemble des premières arêtes des chemins de la racine à v.

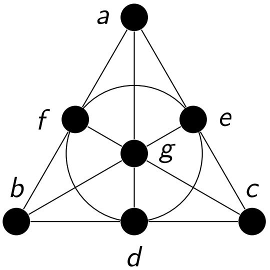
Base forcée

On donne une lettre à chaque élément de matroïde :

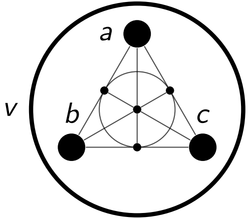


Base forcée

On donne une lettre à chaque élément de matroïde :

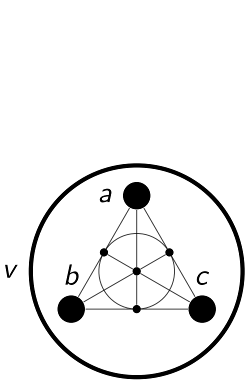


On représente un sommet v ayant une base forcée $\{a, b, c\}$ par :



Opération 1

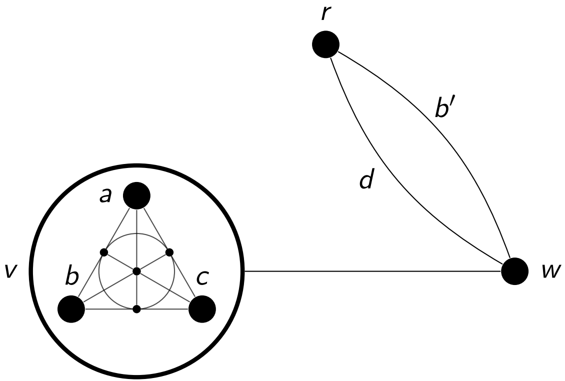
Soient r la racine et v un sommet ayant une base forcée $B = \{a, b, c\}$.



Opération 1

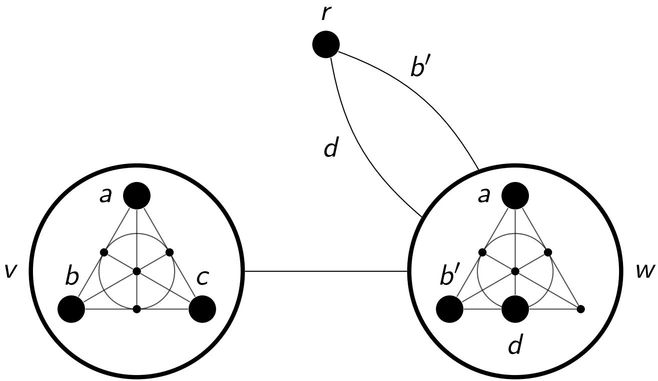
L'opération 1 crée :

- un nouveau sommet w.
- 2 arêtes b' et d entre r et w.
- 1 arête entre v et w.



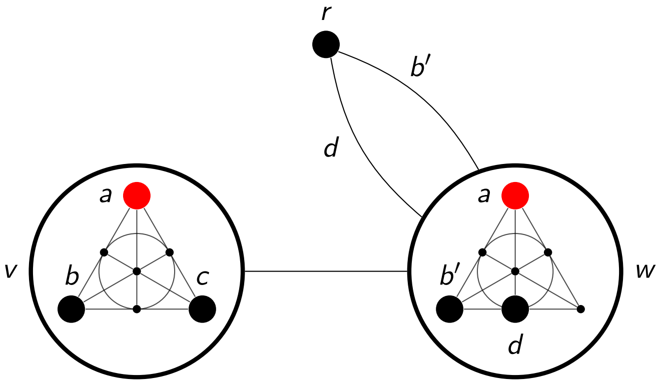
Opération 1

Alors $\{a, b', d\}$ est une base forcée de w.



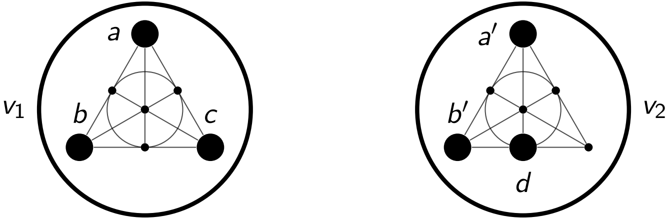
Opération 1

Alors $\{a, b', d\}$ est une base forcée de w.
On colorie les éléments d'un même arbre avec la même couleur.



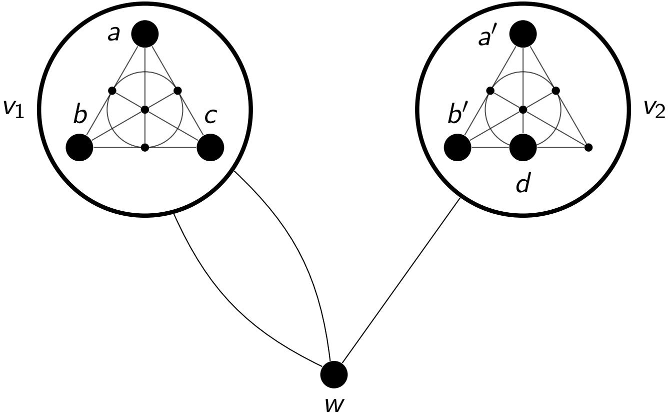
Opération 2

Soient v_1 et v_2 des sommets avec bases forcées $\{a, b, c\}$ et $\{a', b', d\}$.



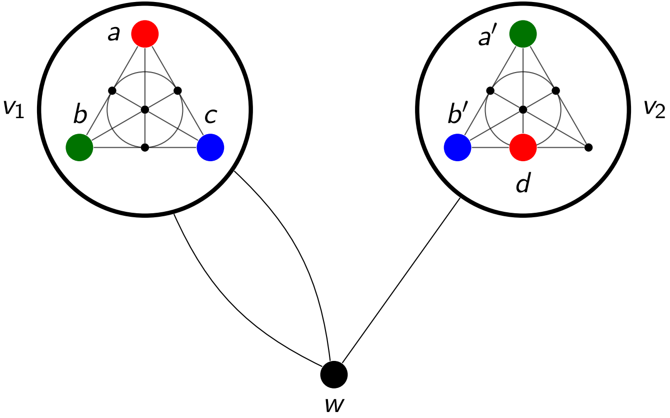
Opération 2

L'opération 2 crée un sommet w avec les arêtes suivantes :



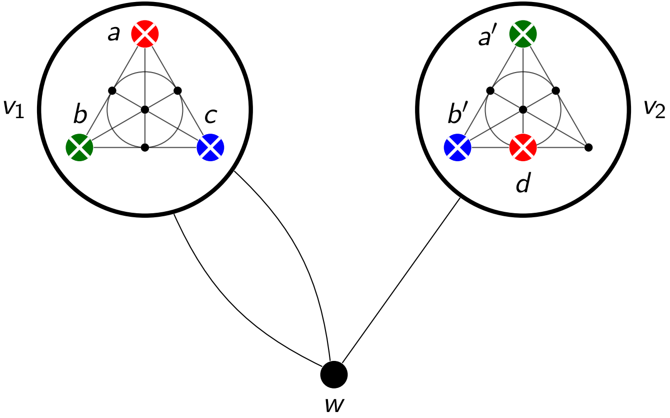
Opération 2

Alors le coloriage suivant devient impossible, car il n'y a pas de coloriage possible des arêtes adjacentes à w qui donne une base :



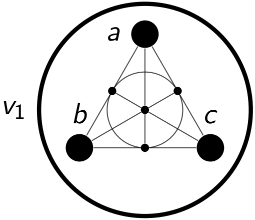
Opération 2

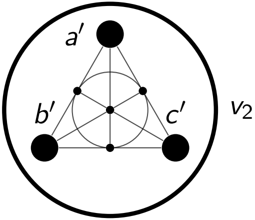
Alors le coloriage suivant devient impossible, car il n'y a pas de coloriage possible des arêtes adjacentes à w qui donne une base :



Opération 3

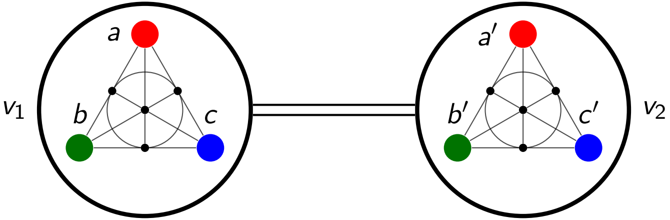
Soient v_1 et v_2 des sommets avec bases forcées $\{a, b, c\}$ et $\{a', b', c'\}$.





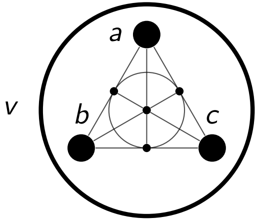
Opération 3

En utilisant les opérations 1 et 2, on peut forcer les couleurs de a, b, c à être les mêmes que a', b', c'.



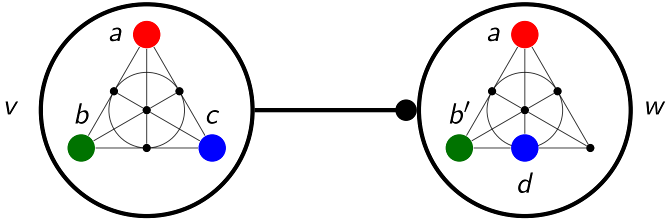
Opération 4

Soit v un sommet avec base forcée $\{a, b, c\}$.

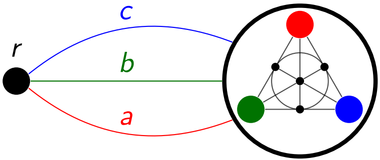


Opération 4

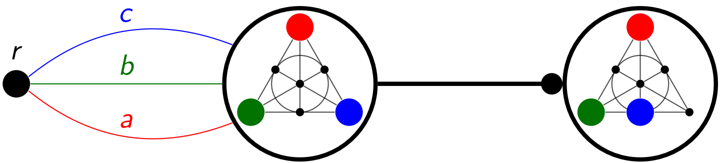
L'opération 4 crée un nouveau sommet w avec base forcée $\{a, b', d\}$ tel que b, c ont les mêmes couleurs que b', d.



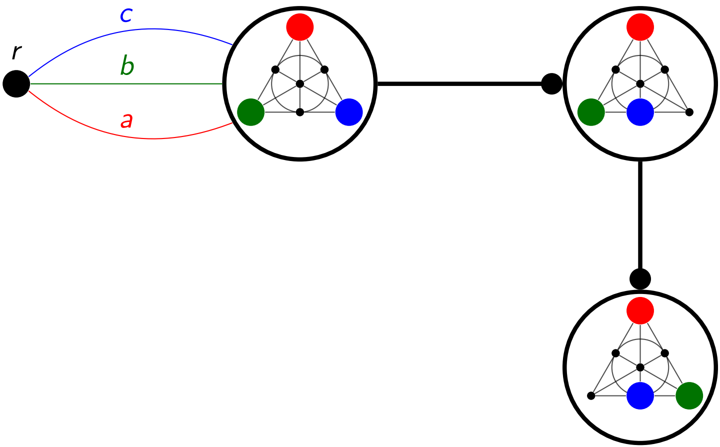
Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté



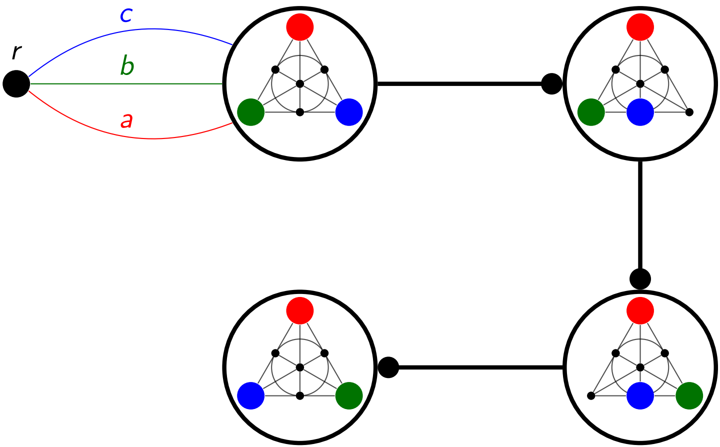
Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté



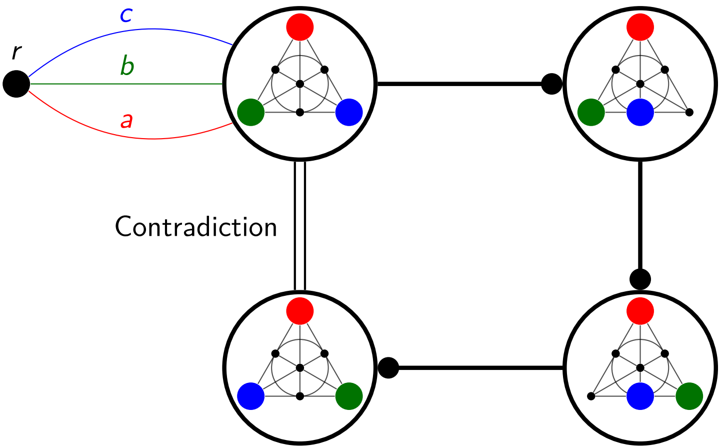
Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté



Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté



Contre-exemple à la conjecture de Frank, non orienté



Contre-exemple à la conjecture de Frank

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

La conjecture de Frank dans le cas non orienté est fausse, même pour les $\mathcal{M}$-graphes avec $r(\mathcal{M}) = 3$.

Contre-exemple à la conjecture de Frank

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

La conjecture de Frank dans le cas non orienté est fausse, même pour les $\mathcal{M}$-graphes avec $r(\mathcal{M}) = 3$.

Ce qui implique :

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

La conjecture de Frank est fausse, même pour les $\mathcal{M}$-graphes orientés acycliques avec $r(\mathcal{M}) = 3$.

Les contre-exemples ont $\approx$ 350 sommets et $\approx$ 200 éléments de matroïdes.

En utilisant ces opérations, on peut réduire 3-SAT à notre problème :

Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

Le problème consistant à décider si un $\mathcal{M}$-graphe orienté contient un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes est **NP-complet**.

Complexités algorithmiques

En utilisant ces opérations, on peut réduire 3-SAT à notre problème :

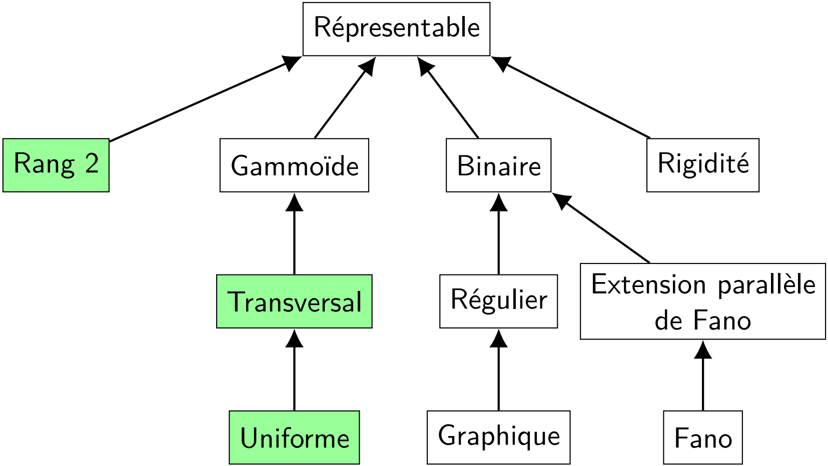
Théorème (Fortier, Király, Szigeti, Tanigawa)

Le problème consistant à décider si un $\mathcal{M}$-graphe orienté contient un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes est **NP-complet**.

Par contre, les preuves des résultats « positifs » sur la conjecture de Frank donnent des algorithmes polynomiaux pour déterminer si un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes existe et le trouver.

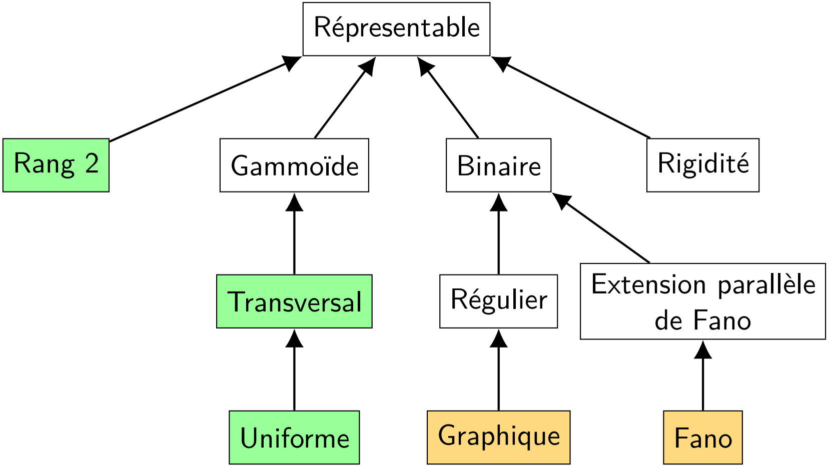
Résultats algorithmiques

1. Algo. **polynomial** pour trouver un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes s'il existe, pour certains matroïdes $\mathcal{M}$:

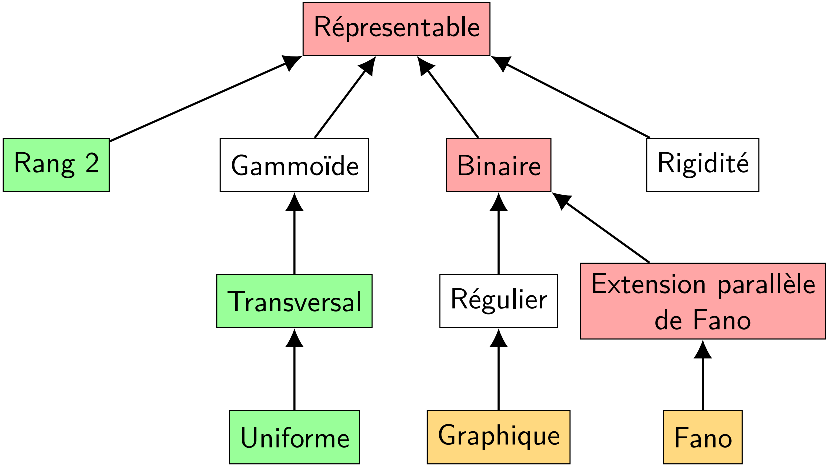


Résultats algorithmiques

2 Algo. **polynomial** pour trouver un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes s'il existe, pour un graphe acyclique et certains $\mathcal{M}$:



3 Déterminer si un $\mathcal{M}$-packing d'arborescences couvrantes existe est **NP-complet** pour certains matroïdes (et dans le cas général) :

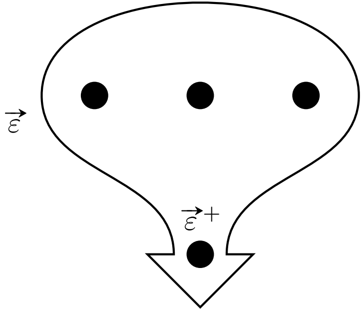


Hypergraphes

Définition

Un **hypergraphe orienté** est un couple $\overrightarrow{H} = (V, \overrightarrow{\mathcal{E}})$ où :

1. V est un ensemble de **sommets**.
2. $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un multi-ensemble d'**hyperarcs**, tel que $\overrightarrow{\varepsilon} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ possède :
   - un ensemble de **queues** $\overrightarrow{\varepsilon}^- \subset V$.
   - une **tête** $\overrightarrow{\varepsilon}^+ \in V - \overrightarrow{\varepsilon}^-$.



Réduction d'hypergraphe

Définition

Réduire un hyperarc $\overrightarrow{\varepsilon}$ consiste à le remplacer par un arc $\overrightarrow{e}$ tel que :

- $\overrightarrow{e}^{+} = \overrightarrow{\varepsilon}^{+}$
- $\overrightarrow{e}^{-} \in \overrightarrow{\varepsilon}^{-}$

Réduction d'hypergraphe

Définition

Réduire un hyperarc $\overrightarrow{\varepsilon}$ consiste à le remplacer par un arc $\overrightarrow{e}$ tel que :

- $\overrightarrow{e}^+ = \overrightarrow{\varepsilon}^+$
- $\overrightarrow{e}^- \in \overrightarrow{\varepsilon}^-$

Définition

Réduire un hypergraphe orienté consiste à réduire tous ses hyperarcs, pour obtenir un graphe orienté.

Réduction d'hypergraphe

Définition

Réduire un hyperarc $\vec{\varepsilon}$ consiste à le remplacer par un arc $\vec{e}$ tel que :

- $\vec{e}^+ = \vec{\varepsilon}^+$
- $\vec{e}^- \in \vec{\varepsilon}^-$

Définition

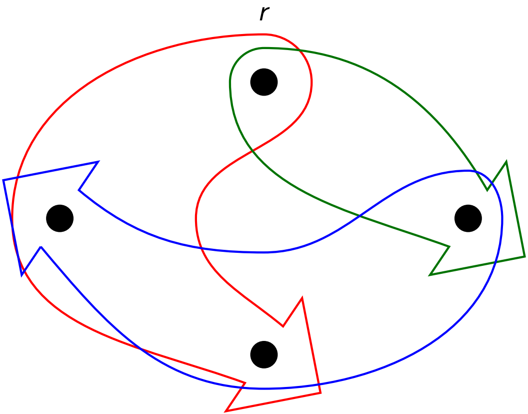
Réduire un hypergraphe orienté consiste à réduire tous ses hyperarcs, pour obtenir un graphe orienté.

Définition

Soit $\vec{H}$ un hypergraphe orienté.

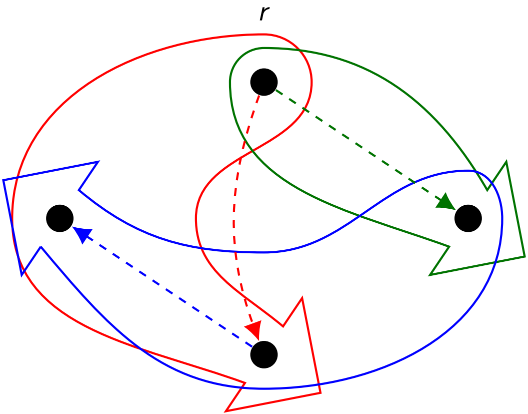
- $\vec{H}$ est un **hyperchemin** s'il peut être réduit en un chemin.
- $\vec{H}$ est une ***r*-hyperarborescence** s'il peut être réduit en une r-arborescence.

Réduction d'hypergraphe



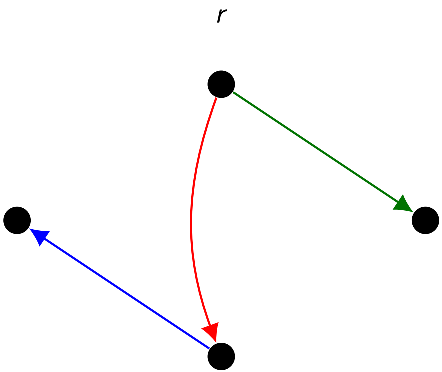
r-hyperarborescence.

Réduction d'hypergraphe



r-hyperarborescence.

Réduction d'hypergraphe



Réduction en r-arborescence.

Hypergraphe

Définition

Un $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-hypergraphe** orienté est un hypergraphe orienté avec une racine r dont les hyperarcs sortant sont en fait des arcs et sont identifiés avec les éléments du matroïde $\mathcal{M}$.

Hypergraphe

Définition

Un $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-hypergraphe** orienté est un hypergraphe orienté avec une racine r dont les hyperarcs sortant sont en fait des arcs et sont identifiés avec les éléments du matroïde $\mathcal{M}$.

Les définitions de $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-hyperarc-connexe** et $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**-packing d'hyperarborescences** sont similaires à celles des graphes.

Hypergraphe

En généralisant un théorème de Frank :

Théorème (Fortier, Király, Léonard, Szigeti, Talon)

Soit $\vec{\mathcal{H}}$ un $\mathcal{M}$-hypergraphe orienté $\mathcal{M}$-hyperarc-connexe.
Alors il est possible de réduire $\vec{\mathcal{H}}$ en un $\mathcal{M}$-graphe orienté $\vec{\mathcal{G}}$ $\mathcal{M}$-arc-connexe. De plus :

$$\vec{\mathcal{G}} \text{ a un } \mathcal{M}\text{-packing de } k \text{ arborescences.}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\vec{\mathcal{H}} \text{ a un } \mathcal{M}\text{-packing de } k \text{ hyperarborescences.}$$

Hypergraphe

En généralisant un théorème de Frank :

Théorème (Fortier, Király, Léonard, Szigeti, Talon)

Soit $\vec{\mathcal{H}}$ un $\mathcal{M}$-hypergraphe orienté $\mathcal{M}$-hyperarc-connexe.
Alors il est possible de réduire $\vec{\mathcal{H}}$ en un $\mathcal{M}$-graphe orienté $\vec{\mathcal{G}}$ $\mathcal{M}$-arc-connexe. De plus :

$$\vec{\mathcal{G}} \text{ a un } \mathcal{M}\text{-packing de } k \text{ arborescences.}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\vec{\mathcal{H}} \text{ a un } \mathcal{M}\text{-packing de } k \text{ hyperarborescences.}$$

$\Longrightarrow$ tous les résultats positifs de $\mathcal{M}$-packing s'étendent aux hypergraphes.

Autres extensions du théorème d'Edmonds

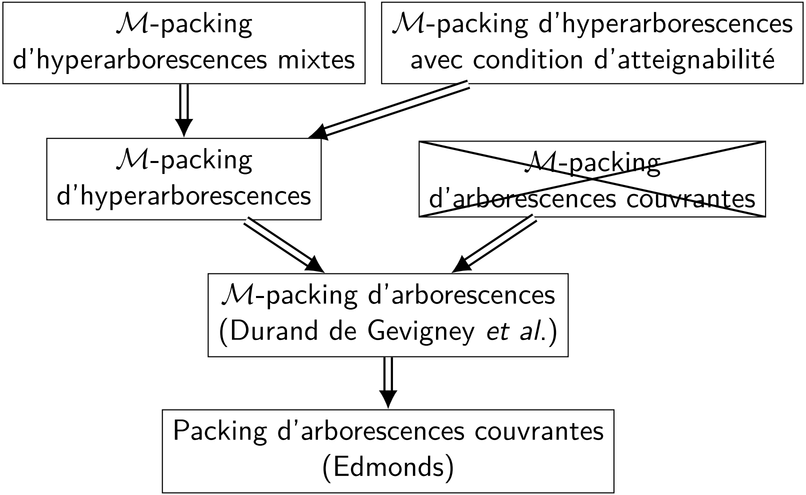
$\mathcal{M}$-packing d'arborescences
(Durand de Gevigney *et al.*)

$\Downarrow$

Packing d'arborescences couvrantes
(Edmonds)

Avant ma thèse.

Autres extensions du théorème d'Edmonds



Après ma thèse.

Prolongements

1. Prouver ou réfuter la conjecture de Frank pour les classes de matroïdes restantes.
2. Trouver une « bonne » définition de connexité **globale** avec condition de matroïde.
3. Étudier la **sommet**-connexité avec condition de matroïde.
4. Prouver ou réfuter d'autres extensions du théorème d'Edmonds (hypergraphes **mixtes avec condition d'atteignabilité**...).
5. Concevoir un algorithme **combinatoire** polynomial pour trouver un $\mathcal{M}$-packing de chemins/arborescences.

Prolongements

1. Prouver ou réfuter la conjecture de Frank pour les classes de matroïdes restantes.
2. Trouver une « bonne » définition de connexité **globale** avec condition de matroïde.
3. Étudier la **sommet**-connexité avec condition de matroïde.
4. Prouver ou réfuter d'autres extensions du théorème d'Edmonds (hypergraphes **mixtes avec condition d'atteignabilité**...).
5. Concevoir un algorithme **combinatoire** polynomial pour trouver un $\mathcal{M}$-packing de chemins/arborescences.

Je vous remercie de votre attention.